Compétences - Espaces vectoriels

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

TOUT LE PROGRAMME SUR LA DERIVATION, ET :

Dans le chapitre espace vectoriel : toujours repérer de quels types sont les vecteurs : des vecteurs abstraits/généraux, des matrices de taille 3×2, des éléments de $\mathbb{R}^n$, des polynômes, des suites etc.

1 Espaces vectoriels

- ☐ Avoir compris qu'un espace vectoriel est un ensemble dont on peut additionner les éléments et dont on peut multiplier les éléments par un réel (un scalaire). Idée de stabilité par combinaison linéaire.
- ☐ Savoir appliquer les règles de calculs dans les espaces vectoriels.
- ☐ Connaître les espaces vectoriels classiques et les opérations associées : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, espaces des suites réelles, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- ☐ Connaître la définition et savoir traduire en mathématiques que : "un vecteur est combinaison linéaire d'une famille de vecteurs".
  Savoir le faire sur des exemples concrets simples (de votre invention) dans chacun des espaces vectoriels de référence.
- ☐ Savoir montrer qu'un vecteur est (ou n'est pas) combinaison linéaire d'autres vecteurs.
  Savoir le faire sur des exemples concrets simples (de votre invention) dans chacun des espaces vectoriels de référence.
- ☐ Dans une combinaison linéaire : savoir faire la différence entre les vecteurs et les scalaires et bien repérer qu'une combinaison linéaire est une somme de vecteurs.

2 Espaces vectoriels inclus dans un espace vectoriel : sous-espaces vectoriels (sous-ensemble non vide stable par combinaisons linéaires)

Généralités

- ☐ Définition d'un sous-espace vectoriel et caractérisation : 3 points à vérifier.
- ☐ Le vecteur nul appartient à tout sous-espace vectoriel.
- ☐ Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel
- ☐ Sous-espaces vectoriels triviaux.
- ☐ Sous-espaces vectoriels de référence : $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{C}^n(D,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(D,\mathbb{R})$, ensemble des matrices symétriques, ensemble des matrices diagonales.
- ☐ Connaître et savoir construire des exemples simples d'ensembles qui sont des sous-espaces vectoriels d'espace vectoriel de référence.
- ☐ Connaître et savoir construire des exemples simples d'ensembles qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels d'espace vectoriel de référence.
- ☐ Avoir une idée des différents sous-espaces vectoriels possibles dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (représentation graphique possible).
- ☐ L'intersection finie de sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel. (Démonstration exigible pour deux)
  ⚠Ce n'est pas le cas de l'union $F \cup G$ (sauf si l'un est inclus dans l'autre). Avoir en tête un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$.

Sous-espace vectoriel engendré

- ☐ Définition avec des mots (ensemble des vecteurs qui sont combinaisons linéaires de la famille) et définition en écriture mathématique.
  Notation : Vect$(u_1, \cdots, u_p)$. ⚠C'est un ensemble.
- ☐ Savoir traduire que $w \in$Vect$(u_1, \cdots, u_p)$ et savoir vérifier si $w \in$Vect$(u_1, \cdots, u_p)$ ou non.
- ☐ Vect$(u_1, \cdots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E. (Démonstration exigible)
- ☐ Si F est un sous-espace vectoriel de E. Vect$(u_1, \cdots, u_p) \subset F$ équivaut à $u_1, \cdots, u_s \in F$ (Démonstration exigible)
- ☐ Savoir montrer que Vect$(u_1, \cdots, u_p) =$Vect$(v_1, \cdots, v_s)$ en utilisant la propriété précédente.
- ☐ Deux principales méthodes pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E :
  - ⋆ Vérifier les trois points de la définition
  - ⋆ Déterminer une famille $(u_1, , \cdots, u_p)$ tel que $F =$Vect$(u_1, \cdots, u_p)$ (Raisonner par équivalence ou double inclusion).
    ⚠Ne fonctionne pas dans tous les cas.

3 Différents types de famille de vecteurs.

Familles génératrices

- ☐ Définition de famille génératrice d'un espace vectoriel F (⚠toujours préciser de quel espace vectoriel).
Remarquer qu'une famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$.
- ☐ Savoir traduire la définition en mots : Tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs u_1,...,u_p et réciproquement toute combinaison linéaire des vecteurs u_1,...,u_p appartient à F.
⚠Il faut les deux sens - double inclusion (savoir expliquer quel "piège" vise cette remarque)
- ☐ Savoir trouver des familles génératrices d'espaces vectoriels sur des exemples simples.
- ☐ Il existe des espaces vectoriels qui n'admettent pas de famille génératrice (en connaître)
- ☐ Savoir montrer qu'une famille est génératrice d'un espace vectoriel (⚠Il faut bien justifier la double inclusion).
- ☐ Si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$. Connaître les modifications possibles sur la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ conservant son caractère générateur de F (ajout de vecteurs avec certaines propriétés à connaître, suppression d'un vecteur avec certaines propriétés à connaître etc.)
- ☐ Exemples classiques de familles génératrices pour $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$.

Familles libres et liées

- ☐ Connaître la définition d'une famille liée, mathématique et avec des mots : au moins un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille (on ne sait pas a priori lequel)
- ☐ Connaître la caractérisation d'une famille libre
- ☐ Savoir montrer qu'une famille est libre en utilisant la caractérisation.
- ☐ Une famille contenant un seul vecteur non nul est libre et une famille de deux vecteurs non colinéaires est libre (⚠ne fonctionne que pour des familles de 1 ou 2 vecteurs).
- ☐ Intérêt d'une famille libre : "identification coefficients à coefficients" à savoir expliquer et montrer. (Démonstration exigible)
- ☐ Si $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre. Connaître les modifications possibles sur la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ conservant son caractère libre (suppression d'un vecteur, ajout de vecteurs avec certaines propriétés à connaître etc.)
- ☐ Si $(u_1, \cdots, u_p)$ est liée. Connaître les modifications possibles sur la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ conservant son caractère liée (ajout de vecteur etc.)
- ☐ Exemple classique : famille de polynômes échelonnée en degrés
- ☐ Les exemples classiques de familles génératrices pour $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont libres.

Notes aux colleurs

Le chapitre sur les espaces vectoriels n'est pas terminé et aucun exercice n'a été fait en TD. Les exercices sur les espaces vectoriels, si vous en donnez, seront élémentaires et nous vous demandons de plus vous concentrer sur la chapitre de dérivation.
Merci.