Programme de colle 12

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

Note aux colleurs : aucun exercice en dehors du cours n'a été fait sur le dénombrement. Le cours n'est pas terminé en EC1A sur le sujet (une démarcation apparaît dans le programme)*. Les exercices porteront donc principalement sur le chapitre d'espace vectoriel. Noter que la notion de dimension n'a pas été vue.

Dans le chapitre espace vectoriel : toujours repérer de quels types sont les vecteurs : des vecteurs abstraits/généraux, des matrices de taille 3×2, des éléments de $\mathbb{R}^n$, des polynômes, des suites etc.

1 Espaces vectoriels

- ☐ Avoir compris qu'un espace vectoriel est un ensemble dont on peut additionner les éléments et dont on peut multiplier les éléments par un réel (un scalaire). Idée de stabilité par combinaison linéaire.
- ☐ Savoir appliquer les règles de calculs dans les espaces vectoriels.
- ☐ Connaître les espaces vectoriels classiques et les opérations associées : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, espaces des suites réelles, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- ☐ Connaître la définition et savoir traduire en mathématiques que : "un vecteur est combinaison linéaire d'une famille de vecteurs".
  Savoir le faire sur des exemples concrets simples (de votre invention) dans chacun des espaces vectoriels de référence.
- ☐ Savoir montrer qu'un vecteur est (ou n'est pas) combinaison linéaire d'autres vecteurs.
  Savoir le faire sur des exemples concrets simples (de votre invention) dans chacun des espaces vectoriels de référence.
- ☐ Dans une combinaison linéaire : savoir faire la différence entre les vecteurs et les scalaires et bien repérer qu'une combinaison linéaire est une somme de vecteurs.

2 Espaces vectoriels inclus dans un espace vectoriel : sous-espaces vectoriels (sous-ensemble non vide stable par combinaisons linéaires)

Généralités

- ☐ Définition d'un sous-espace vectoriel et caractérisation : 3 points à vérifier.
- ☐ Le vecteur nul appartient à tout sous-espace vectoriel.
- ☐ Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel
- ☐ Sous-espaces vectoriels triviaux.
- ☐ Sous-espaces vectoriels de référence : $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{C}^n(D,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(D,\mathbb{R})$, ensemble des matrices symétriques, ensemble des matrices diagonales.
- ☐ Connaître et savoir construire des exemples simples d'ensembles qui sont des sous-espaces vectoriels d'espace vectoriel de référence.
- ☐ Connaître et savoir construire des exemples simples d'ensembles qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels d'espace vectoriel de référence.
- ☐ Avoir une idée des différents sous-espaces vectoriels possibles dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (représentation graphique possible).
- ☐ L'intersection finie de sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel. (Démonstration exigible pour deux)
  ⚠Ce n'est pas le cas de l'union $F \cup G$ (sauf si l'un est inclus dans l'autre). Avoir en tête un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$.

Sous-espace vectoriel engendré

- ☐ Définition avec des mots (ensemble des vecteurs qui sont combinaisons linéaires de la famille) et définition en écriture mathématique.
  Notation : $\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p)$. ⚠C'est un ensemble.
- ☐ Savoir traduire que $w \in \mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p)$ et savoir vérifier si $w \in \mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p)$ ou non.
- ☐ $\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E. (Démonstration exigible)
- ☐ Si F est un sous-espace vectoriel de E. $\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p) \subset F$ équivaut à $u_1,\cdots,u_s \in F$ (Démonstration exigible)
- ☐ Savoir montrer que $\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p) = \mathrm{Vect}(v_1,\cdots,v_s)$ en utilisant la propriété précédente.
- ☐ Deux principales méthodes pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E :

- ⋆ Vérifier les trois points de la définition
- ⋆ Déterminer une famille $(u_1, , \cdots, u_p)$ tel que $F =$Vect$(u_1, \cdots, u_p)$ (Raisonner par équivalence ou double inclusion).
  ⚠Ne fonctionne pas dans tous les cas.

3 Différents types de famille de vecteurs.

Familles génératrices

- ☐ Définition de famille génératrice d'un espace vectoriel F (⚠toujours préciser de quel espace vectoriel).
  Remarquer qu'une famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est génératrice de Vect$(u_1, \cdots, u_p)$.
- ☐ Savoir traduire la définition en mots : Tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs u_1,...,u_p et réciproquement toute combinaison linéaire des vecteurs u_1,...,u_p appartient à F.
  ⚠Il faut les deux sens - double inclusion (savoir expliquer quel "piège" vise cette remarque)
- ☐ Savoir trouver des familles génératrices d'espaces vectoriels sur des exemples simples.
- ☐ Il existe des espaces vectoriels qui n'admettent pas de famille génératrice (en connaître)
- ☐ Savoir montrer qu'une famille est génératrice d'un espace vectoriel (⚠Il faut bien justifier la double inclusion).
- ☐ Si $F = \text{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$. Connaître les modifications possibles sur la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ conservant son caractère générateur de F (ajout de vecteurs avec certaines propriétés à connaître, suppression d'un vecteur avec certaines propriétés à connaître etc.)
- ☐ Exemples classiques de familles génératrices pour $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$.

Familles libres et liées

- ☐ Connaître la définition d'une famille liée, mathématique et avec des mots : au moins un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille (on ne sait pas a priori lequel)
- ☐ Connaître la caractérisation d'une famille libre
- ☐ Savoir montrer qu'une famille est libre en utilisant la caractérisation.
- ☐ Une famille contenant un seul vecteur non nul est libre et une famille de deux vecteurs non colinéaires est libre (⚠ne fonctionne que pour des familles de 1 ou 2 vecteurs).
- ☐ Intérêt d'une famille libre : "identification coefficients à coefficients" à savoir expliquer et montrer. (Démonstration exigible)
- ☐ Si $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre. Connaître les modifications possibles sur la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ conservant son caractère libre (suppression d'un vecteur, ajout de vecteurs avec certaines propriétés à connaître etc.)
- ☐ Si $(u_1, \cdots, u_p)$ est liée. Connaître les modifications possibles sur la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ conservant son caractère liée (ajout de vecteur etc.)
- ☐ Exemple classique : famille de polynômes échelonnée en degrés
- ☐ Les exemples classiques de familles génératrices pour $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont libres.

Bases d'un espace vectoriel

- ☐ Définition d'une famille est une base de F.
- ☐ Une base n'est pas unique. Savoir construire des exemples simples dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}_2[X]$ etc.
- ☐ Il existe des espaces vectoriels qui n'admettent pas de base (en connaître)
- ☐ Idée à connaître : une base est une famille génératrice dont on ne peut pas enlever un vecteur (sinon elle n'est plus génératrice) ou une famille libre à laquelle on ne peut pas ajouter de vecteurs.
- ☐ Définition/existence de coordonnées : $\mathcal{B}$ est une base de E équivaut à tout vecteur de E possède une unique écriture comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$. (Démonstration exigible)
  Les coordonnées sont uniques mais dépendent de la base choisie.
- ☐ Faire le lien entre : existence et unicité des coordonnées / $\mathcal{B}$ est génératrice de E et libre.
- ☐ Représentation graphique de ce que sont les coordonnées dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$).
- ☐ Savoir montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E un espace vectoriel.
  - ⋆ Montrer le caractère libre et que Vect$(\mathcal{B}) = E$.
  - ⋆ Montrer que tout élément de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ et que tous les vecteurs $\mathcal{B}$ appartiennent à E.

☐ Savoir trouver une base de E en partant d'une famille génératrice et en enlevant des vecteurs.

☐ Connaître les exemples classiques de bases dans $\mathbb{R}^n$ (base canonique), $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (base canonique) et $\mathbb{R}_n[X]$ (base canonique et base de "Taylor").

4 Dénombrement

Ensemble fini

☐ Définition de E est un ensemble fini et du cardinal : (En terme de numérotation ou de bijection)

☐ Si E est fini et $A \subset E$ alors A est fini et comparaison des cardinaux de A et E.

☐ Que dire de A si $A \subset E$ et $\text{card}(A) = \text{card}(E)$?

Unions d'ensembles finis

☐ Cas de l'union disjointe d'un nombre fini d'ensembles

☐ Cardinal du complémentaire (Démonstration exigible)

☐ Cas de l'union de deux ensembles non nécessairement disjoints et pour les EC1 A de trois ensembles (Démonstration exigible)

Conséquences/lien sur les applications

☐ Si E est fini et F un ensemble : il existe une bijection de E dans F si et seulement si F est fini et $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

⋆ Pour E et F finis et $f : E \to F$

1. Si f injective que dire alors des cardinaux de E et F ? (Savoir l'illustrer et principe des tiroirs)
2. Si f surjective que dire alors des cardinaux de E et F ? (Savoir l'illustrer)
3. Condition nécessaire et suffisant de bijectivité de f dans le cas où $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ (seulement en EC1 B)

Dénombrer

☐ Comprendre le principe multiplicatif
Illustration comme dénombrement des possibilités d'un arbre de décision un peu particulier.
Prendre garde au fait qu'il faut qu'à chaque étape le nombre de possibilités ne dépendent pas du choix fait au cas précédent.

Listes

☐ Nombre d'éléments d'un produit cartésien d'ensemble finis (Démonstration exigible)

☐ Cas particulier de E^p et notion de $p-$liste (Démonstration exigible)

☐ Notions de $p-$arrangements (ou $p-$liste sans répétitions) d'éléments de E

☐ Lien avec le nombre d'injections

☐ Nombre de $p-$arrangement d'éléments de E quand E est fini. (Démonstration exigible)

Fin du programme pour les EC1A

☐ Lien avec le nombre de bijections

☐ Cas particulier des permutations d'élément de E (pour E fini) et nombre de permutations d'éléments de E.

☐ Attention dans le cadre des listes : changer l'ordre des éléments produit une liste différente.

Combinaisons / sous-ensembles d'un ensemble E fini

☐ Définition des $p-$combinaison de E.

☐ Attention une $p-$combinaison de E est un ensemble : un élément ne peut y être qu'une seule fois et les éléments composant la $p-$combinaison n'ont pas d'ordre.

☐ Nombre de p-combinaison (Démonstration exigible)

☐ Nombre de parties d'un ensemble E (Démonstration exigible - plusieurs démonstration sont possibles : principe multiplicatif, union disjointe des $\mathcal{P}_p(E)$)