Programme de colles 15 (3 février - 8 février)

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

Algèbre linéaire

Dans la suite, E et F sont des espaces vectoriels, et sauf mention contraire, $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- ☐ Savoir déterminer si une fonction donnée est linéaire ou non.
- ☐ $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel (on pourra utiliser que $\mathcal{F}(E, F)$ est un espace vectoriel de référence). (Démonstration exigible)
- ☐ Distributivité de la composition sur les endomorphismes : pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et f, g, h linéaires et définies de sorte que la composition ait un sens (savoir retrouver les conditions), $(\lambda f + \mu g) \circ h = \lambda(f \circ h) + \mu(g \circ h)$, et de même, quand la composition a un sens, $h \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda(h \circ f) + \mu(h \circ g)$. En conséquence, par une récurrence immédiate, on a aussi $(\lambda f)^n = \lambda^n f^n$ si f est un endomorphisme. (Question de cours : savoir distribuer la composition et simplifier par exemple $(2f - 3h) \circ (2f^2 - 5\mathrm{id}_E)$, et donner les conditions pour que tout soit bien défini.)
- ☐ Définition de $P(f)$, pour un polynôme P et f un endomorphisme de E. Comprendre que $P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f)$.
- ☐ Binôme de Newton pour les endomorphismes qui commutent (Question de cours : l'énoncer, sans la démonstration, puis l'appliquer pour simplifier dans un cas concret comme par exemple $(f + 2\mathrm{id}_E)^n$)
- ☐ Trouver des polynômes annulateurs dans des cas simples.
- ☐ Notion d'isomorphisme, d'automorphisme.
- ☐ La réciproque d'un isomorphisme est encore linéaire. (Démonstration exigible)
- ☐ Définition du noyau.
- ☐ Le noyau est un sous-espace vectoriel de E (Démonstration exigible en EC1B - peut être donnée en exercice en EC1A)
- ☐ Lien entre injectivité de f et son noyau. (Démonstration exigible)
- ☐ Définition de $\mathrm{Im}(f)$ (déjà vu plus généralement pour toute fonction f), il faut absolument savoir s'en servir : si $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe... (à compléter), et réciproquement pour $y \in F$, si on trouve un antécédent de y par f, $y \in \mathrm{Im}(f)$.
- ☐ Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille génératrice de E (donc par exemple si c'est une base de E), alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p))$. (Démonstration exigible)
- ☐ Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, f est injective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est libre (Démonstration exigible)
- ☐ Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, f est surjective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est génératrice. (Démonstration exigible)
- ☐ Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E. Soient $f_1, \ldots, f_p \in F$. Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(e_1) = f_1, f(e_2) = f_2, \ldots, f(e_p) = f_p$. (Question de cours : énoncer précisément ce résultat, l'illustrer sur un exemple de son choix, et prouver l'unicité seulement, pas l'existence)
- ☐ Pratiquement ce résultat est utilisé principalement de deux façons :
  - — Pour définir une application linéaire $f : E \to F$ il suffit de définir $f(e_1), \cdots, f(e_p)$
  - — Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ sont telles que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) = g(e_i)$, alors $f = g$ (c'est l'unicité). On pourra y penser par exemple pour montrer qu'une application linéaire est nulle : il suffit de montrer que l'image d'une base est nulle.