Programme de colle : du 10 mars au 15 mars

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

Intégration

Notion de primitive

- ☐ Si une fonction f admet une primitive F sur un intervalle I alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions $\{F + C \,|\, C \in \mathbb{R}\}$. (Démonstration exigible)
- ☐ Savoir vérifier qu'une fonction g est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I.
- ☐ Connaître des primitives usuelles (si on connaît ses dérivées usuelles on connaît ses primitives usuelles).
- ☐ Savoir reconnaître une expression qui est la dérivée d'une composée afin d'en déterminer une primitive.
- ☐ (Énoncer clairement le théorème fondamental de l'analyse.)

Notion d'intégrale

- ☐ Définition d'intégrale d'une fonction continue (généralisation à : continue par morceaux) comme l'aire algébrique (ou : aire signée) sous la courbe...
- ☐ Savoir étudier les fonctions du type $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ (vérifier que tout est bien défini, penser à introduire, en justifiant l'existence, F une primitive de f afin de pouvoir tout exprimer en fonction de F, u, v).

Propriétés de l'intégrale

- ☐ Relation de Chasles.
- ☐ Linéarité.
- ☐ Positivité de l'intégrale d'une fonction positive. Cas d'égalité (ne pas oublier l'hypothèse f continue, sinon cela est faux).(Question de cours : énoncer la positivité et le cas d'égalité très précisément).
- ☐ Croissance de l'intégrale. (Démonstration exigible en utilisant la positivité).
- ☐ Inégalité triangulaire (Démonstration exigible en utilisant la croissance de l'intégrale).

Propriétés de calculs sur l'intégrale

- ☐ Intégration par parties. (Démonstration exigible).
- ☐ Formule du changement de variables (Démonstration exigible).

Les sommes de Riemann

- ☐ Définition des Sommes de Riemann à gauche et à droite d'une fonction définie sur un segment $[a, b]$. Savoir représenter graphiquement les sommes de Riemann
- ☐ Théorème des sommes de Riemann : convergence dans le cas où f est continue sur $[a, b]$ vers l'intégrale. (Question de cours : donner, par exemple, la somme à droite de Riemann de la fonction carrée sur $[1, 3]$, et sa limite, exemple concret au choix pour le colleur).

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

- ☐ Définition de fonction continue par morceaux. Avoir en tête un exemple simple de fonctions continue par morceaux et savoir représenter l'allure d'une telle fonction sur un dessin. Savoir aussi donner des fonctions qui ne sont pas continues par morceaux.
- ☐ Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux comme la somme des intégrales des prolongements continus de la fonction f sur chacun des intervalles où elle est continue.

Variable aléatoire réelle sur un univers fini

- ☐ Définition de variable aléatoire comme fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.
- ☐ Notion d'univers image de X une variable aléatoire
- ☐ Notion d'événements définis à partir d'une variable aléatoire : définition générale pour $D \subset \mathbb{R}$ de $[X \in D]$. Notation $[X = x]$, $[X \leq x]$, $[X > x]$ etc. (Question de cours : donner explicitement ces ensembles pour une variable X et un univers Ω au choix pour le colleur).
- ☐ Système complet d'événements lié à une variable aléatoire réelle finie. (Démonstration exigible en EC1B, pour la EC1A, question de cours : énoncer ce résultat, et rappeler ce qu'est un système complet d'événements).

Loi de probabilité

- ☐ Donner la loi d'une variable aléatoire X réelle finie c'est donner son univers image $X(\Omega)$ et donner pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x)$.
- ☐ Pour des réels $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et des réels positifs $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, il existe un univers Ω fini et une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \{x_i | i \in [\![1, n]\!]\}$ et $P(X = x_i) = p_i$.
- ☐ Savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire X et déterminer à partir de la loi de X celle de $g(X)$ où g est une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Fonction de répartition

- ☐ Définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- ☐ Connaître l'allure de la fonction de répartition pour des variables aléatoires réelles finies. Savoir y lire les éléments de $X(\Omega)$ et les probabilités des événements $[X = x]$.
- ☐ Propriétés de croissance , continuité à droite, limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction de répartition.
- ☐ Lien entre les événements $[a < X \leq b]$, $[X \leq b]$ et $[a < X]$.
- ☐ Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, savoir retrouver les probabilités de $X = x_i$ à l'aide de la fonction de répartition : *La fonction de répartition de X caractérise la loi de X.*
- ☐ Dans le cas d'une variable aléatoire réelles finies avec $X(\Omega)$ comme défini ci-dessus, savoir retrouver les liens entre $[X = x_i]$, $[x_{i-1} < X \leq x_i]$, $[X \leq x_i]$ et $[X \leq x_{i-1}]$.
- ☐ Savoir déterminer la fonction de répartition d'une variable X si on connaît sa loi.

Indépendance de variables aléatoires

- ☐ Définition d'indépendance de deux variables aléatoires
- ☐ Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ aussi.
- ☐ Si X et Y sont indépendantes alors pour tous $C, D \subset \mathbb{R}$, $[X \in C]$ et $[Y \in D]$ sont des événements indépendants (tout événement ne dépendant que de X est indépendant de tout événement ne dépendant que de Y).
- ☐ Définition d'indépendance mutuelle de variables aléatoires.
- ☐ Loi de la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p (cette somme représente le nombre de 1s, c'est donc une binomiale de paramètres n, p).

Espérance

- ☐ Deux définitions de l'espérance de X (une avec une somme sur les $w \in \Omega$, l'autre avec une somme sur les $x \in X(\Omega)$).
- ☐ Définition de variable aléatoire centrée.
- ☐ Linéarité (Démonstration exigible).
- ☐ Positivité et croissance de l'espérance.
- ☐ Inégalité triangulaire.
- ☐ Calcul de l'espérance de $g(X)$: Théorème de transfert.
- ☐ Lien entre l'espérance de l'indicatrice d'un événement A et $P(A)$.
- ☐ Dans le cas de variables aléatoires **mutuellement indépendantes**, l'espérance du produit est le produit des espérances.

Variance

- ☐ Définition de la variance de X.
- ☐ Notion de variable aléatoire réduite.
- ☐ Théorème de Koenig-Huygens. (Démonstration exigible)
- ☐ $V(aX+b) = ...$ (Démonstration exigible)
- ☐ Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires **mutuellement indépendantes**. Alors $V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$

Lois usuelles

- ☐ Loi certaine. Espérance et Variance.
- ☐ Loi uniforme sur E. Espérance et variance sur $E = [\![a, b]\!]$. (Démonstrations exigibles sur $[\![1, n]\!]$)
- ☐ Loi de Bernoulli. Espérance et variance. (Démonstrations exigibles)
- ☐ Loi Binomiale. Espérance et variance (Démonstration exigible en utilisant que la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p suit une loi binomiale de paramètre n et p).

Notes pour les colleurs : peu d'exercices ont été faits pour l'instant sur les variables aléatoires.