Programme de colle : du 24 mars au 29 mars

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

1 Analyse asymptotique

- ☐ Définition de l'équivalence de deux suites et de $u_n = o(v_n)$ (les définitions avec les quotients). Définitions pour les fonctions.
- ☐ Équivalents usuels $(\sin(x), \tan(x), \arctan(x), \ln(1+x), e^x - 1, \cos(x) - 1, (1+x)^\alpha$ quand $x \to 0$. Équivalent d'un polynôme en $\pm\infty$.
- ☐ Si $u_n \sim v_n$, et si (v_n) admet une limite (finie ou non), alors (u_n) admet cette même limite. (Démonstration exigible).
- ☐ Propriétés des équivalents : symétrie, transitivité, compatibilité avec la multiplication, équivalent à la puissance α (α fixé). (Question de cours : énoncer ces quatre propriétés).
- ☐ Propriétés des o : transitivité, somme (la somme de deux $o(u_n)$ est un $o(u_n)$...), multiplication par une suite (si $u_n = o(v_n), a_n u_n = o(a_n v_n)$, simplification par un réel (si $u_n = o(10n), u_n = o(n)$ par exemple...). (Question de cours : énoncer ces quatre propriétés).
- ☐ Équivalence entre $v_n - u_n = o(u_n)$ et $u_n \sim v_n$. (Démonstration exigible).
- ☐ Croissances comparées.
- ☐ Donner des suites $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$ telles que $u_n + v_n$ ne soit PAS équivalent à $a_n + b_n$. (Question de cours).
- ☐ Donner une fonction f et des suites u, v telles que $u_n \sim v_n$ mais $f(u_n)$ PAS équivalent à $f(v_n)$. (Question de cours).
- ☐ Propriété de substitution : si $x(t) \underset{t \to t_0}{\to} x_0$ et $u(x) \underset{x \to x_0}{\sim} v(x)$, que dire de $u(x(t))$ et $v(x(t))$ quand $t \to t_0$?
- ☐ Énoncer les reformulations des propriétés "f continue en x_0" et "f dérivable en x_0" avec des o. (Question de cours).
- ☐ Bonus : appliquer les o pour calculer mentalement de bonnes approximations de, par exemple, 1.01^{100}, $1/0.999$, $\sqrt{10001}$...

2 Séries

- ☐ Savoir que ce qu'on appelle "la série de terme général u_n" est notée $\sum u_n$ et que cela est la SUITE des SOMMES PARTIELLES : $\sum u_n = \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N \geq 0}$ (ou si vous préférez, $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \geq 0}$, les variables sont muettes). Définition analogue dans le cas où (u_n) n'est défini qu'à partir d'un rang n_0.
- ☐ Montrer que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ ont même nature. (Question de cours).
- ☐ Définition du reste d'indice n d'une série, et écriture sous la forme d'une somme (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Toute combinaison linéaire de séries convergentes est convergente (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, et la réciproque est fausse (vocabulaire : série grossièrement divergente). (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et la réciproque est fausse (pour la réciproque fausse : on admettra que $\sum (-1)^n/n$ converge). (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Convergence et sommes des séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$. (Démonstration NON exigible).
- ☐ Notion de série à termes positifs, une série à terme positifs converge si et seulement si elle est majorée (c'est-à-dire s'il existe un majorant des sommes partielles). (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Si pour tout n, $0 \leq u_n \leq v_n$, alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi (et par contraposée si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge aussi). Encore vrai en supposant que $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.
- ☐ Si $u_n = o(v_n)$, que $\sum v_n$ est à termes positifs et converge, alors $\sum u_n$ converge aussi. (Question de cours : donner un contre-exemple de ce théorème si on ne suppose plus que $v_n \geq 0$.
- ☐ Si $u_n \sim v_n$, que $\sum v_n$ est à termes positifs et converge, alors $\sum u_n$ converge aussi (qui peut être prouvé comme conséquence du point précédent)
- ☐ Connaître la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de $\alpha > 0$. (Démonstration NON exigible).
- ☐ Convergence et somme de séries exponentielles. (Démonstration NON exigible).
- ☐ Séries télescopiques : $\sum u_{n+1} - u_n$ et (u_n) ont même nature. (Question de cours, démonstration exigible).