Compétences - Logique, ensembles, raisonnements et applications

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous.

TOUT LE PROGRAMME DE LA SEMAINE PRECEDENTE, ET :

1 Logique

- ☐ Définitions d'une proposition : savoir faire la différence entre ce qui est une proposition et ce qui n'en est pas.
- ☐ Opérateur de négation (opérateur NON) : définition
- Opérateurs ET et OU :
  - ☐ Définitions (tables de vérité), le OU n'est pas exclusif.
  - ☐ Ne pas employer l'un pour l'autre. Savoir donner des exemples simples.
  - ☐ Distributivité (règles de calculs) : attention au parenthésage obligatoire.
  - ☐ Savoir nier (donner la négation) une proposition contenant des OU et des ET.
- Implication :
  - ☐ Faire la différence avec un "donc". Traduire l'implication en français.
  - ☐ Définition (avec la table de vérité et avec le OU), savoir en donner la négation.
  - ☐ Concept de condition nécessaire, de condition suffisante.
  - ☐ Equivalence d'une implication avec sa contraposée **(à savoir démontrer)**.
  - ☐ Définition de la proposition réciproque (à ne pas confondre avec la contraposée).
- Equivalence :
  - ☐ Définition par double implication. Traduire l'équivalence en français (ssi).
  - ☐ Ne pas confondre équivalence et implication.
  - ☐ Concept de condition nécessaire et suffisante.

2 Ensembles

- Comprendre ce qu'est un ensemble :
  - ☐ Bien comprendre les notations in extenso (en extension) versus notation "en compréhension" (notion de variable muette).
  - ☐ Etre capable de donner la "nature" des éléments d'un ensemble.
- Sous-ensemble :
  - ☐ Comprendre et connaître la définition de sous-ensemble (inclusion)
  - ☐ Ne pas confondre $\subset$ et $\in$.
  - ☐ Notation $\mathcal{P}(E)$: un ensemble d'ensembles (savoir donner des exemples).
  - ☐ Définition de l'inclusion d'un ensemble E dans un ensemble F, définition de l'égalité $E = F$.
  - ☐ Les inclusions des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.
  - ☐ Savoir montrer dans des cas concrets simples que $E \subset F$.
  - ☐ Savoir montrer dans des cas concrets simples, par double inclusion, que $E = F$.
- Opérateurs sur les ensembles (et liens avec les opérateurs logiques) :
  - ☐ Définition de $E \cap F$ (lien avec le ET logique).
  - ☐ Définition de $E \cup F$ (lien avec le OU logique).
  - ☐ Complémentaire $\overline{E}$ (lien avec le NON logique, la négation).
  - ☐ Règles de calculs (faire le lien avec les règles en logique) : formules d'associativité, de commutativité, de distributivité $(A \cap (B \cup C)...)$ (Prop 2.1) **(à savoir démontrer)**
  - ☐ Lois de Morgan **(à savoir démontrer)**
  - ☐ Produit cartésien : définition de $E \times F$, et comprendre les notations.
- Quantificateurs $\forall$ et $\exists$:
  - ☐ Syntaxe pour les utiliser.
  - ☐ Ils ne définissent des éléments que pour la suite de la phrase dans laquelle ils se trouvent.
  - ☐ Savoir nier des propriétés avec des $\forall$ et $\exists$.
  - ☐ L'ordre : Comprendre que $\forall ... \exists ...$ ne signifie pas la même chose que $\exists ... \forall ...$; savoir donner des exemples.

3 Raisonnements

- Raisonnements à connaître :
  - ☐ Savoir faire une preuve par l'absurde et quand y penser (exemple classique $\sqrt{2}$ est irrationnel).
  - ☐ Savoir faire une preuve par contraposée et quand y penser, à ne pas confondre avec la preuve par l'absurde quand on rédige (exemple x impair $\implies$ x n'est pas multiple de 6).
  - ☐ Analyse-synthèse. Cas d'utilisation fréquent. Comprendre l'utilité des deux phases. Interprétations possibles :
    - — Analyse : trouver des solutions potentielles, Synthèse : vérifier lesquelles le sont vraiment.
    - — Revient à prouver une équivalence : Analyse : prouve l'implication dans un sens. La Synthèse c'est la remontée.
    - — Revient à faire une double inclusion. Si on note S l'ensemble des solutions cherchées ;
      Analyse : on construit E tel que $S \subset E$. Synthèse : on prouve l'inclusion inverse quitte à retirer des éléments de E.
  - ☐ Récurrences :
    - Niveau 0 Comprendre le principe de récurrence simple et savoir en faire une rédaction efficace. Comprendre que l'on doit prouver $P(0)$ (initialisation) puis "$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$" (hérédité) et agir en conséquence : on fixe $n \in \mathbb{N}$, le but est de montrer $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, donc on suppose $P(n)$ et on cherche à montrer $P(n+1)$.
    - Niveau 1 Comprendre le principe de récurrence forte et savoir en faire une rédaction efficace (attention à la rédaction de l'hérédité)
    - Niveau 2 Comprendre la preuve du principe de récurrence (non exigible en colle).
- Principes de démonstration
  - ☐ Montrer ou nier une proposition commençant par $\forall$.
  - ☐ Montrer ou nier une proposition commençant par $\exists$.
  - ☐ Montrer ou nier une proposition avec des quantificateurs $\forall$ et des $\exists$.