

Programme de colle : du 30 mars au 5 avril

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

1 Séries

- ☐ Savoir que ce qu'on appelle "la série de terme général u_n " est notée $\sum u_n$ et que cela est la SUITE des SOMMES PARTIELLES : $\sum u_n = \left(\sum_{n=0}^N u_n \right)_{N \geq 0}$ (ou si vous préférez, $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \geq 0}$, les variables sont muettes). Définition analogue dans le cas où (u_n) n'est défini qu'à partir d'un rang n_0 .
- ☐ Montrer que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ ont même nature. (Question de cours).
- ☐ Définition du reste d'indice n d'une série, et écriture sous la forme d'une somme (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Toute combinaison linéaire de séries convergentes est convergente (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et la réciproque est fausse (vocabulaire : série grossièrement divergente). (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et la réciproque est fausse (pour la réciproque fausse : on admettra que $\sum (-1)^n/n$ converge). (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Convergence et sommes des séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$. (Démonstration NON exigible).
- ☐ Notion de série à termes positifs, une série à terme positifs converge si et seulement si elle est majorée (c'est-à-dire s'il existe un majorant des sommes partielles). (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Si pour tout n , $0 \leq u_n \leq v_n$, alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi (et par contraposée si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge aussi). Encore vrai en supposant que $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.
- ☐ Si $u_n = o(v_n)$, que $\sum v_n$ est à termes positifs et converge, alors $\sum u_n$ converge aussi. (Question de cours : donner un contre-exemple de ce théorème si on ne suppose plus que $v_n \geq 0$).
- ☐ Si $u_n \sim v_n$, que $\sum v_n$ est à termes positifs et converge, alors $\sum u_n$ converge aussi (qui peut être prouvé comme conséquence du point précédent)
- ☐ Connaître la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de $\alpha > 0$. (Démonstration NON exigible).
- ☐ Convergence et somme de séries exponentielles. (Démonstration NON exigible).
- ☐ Séries télescopiques : $\sum u_{n+1} - u_n$ et (u_n) ont même nature. (Question de cours, démonstration exigible).

2 Espaces vectoriels, dimension finie

F et G sont deux s.e.v. d'un e.v. E .

2.1 Somme de sous-espaces vectoriels dans le cas général

- ☐ Définition de $F + G$.
- ☐ Définition de " F et G sont en somme directe", et caractérisation avec l'intersection réduite à 0_E . (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Définition de " F et G sont supplémentaires dans E " : $E = F \oplus G$. Comprendre que cela revient à montrer, pour tout $u \in E$, qu'il existe $(f, g) \in F \times G$ tels que $u = f + g$ ($E = F + G$), et que de plus ce couple (f, g) est unique (F et G sont en somme directe). Bien sûr on peut aussi penser à utiliser la caractérisation de la somme directe avec l'intersection.
- ☐ Généralisation, avec la définition de $F_1 + \dots + F_p$, de " $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe", de " $F_1, \dots, F_p$ sont supplémentaires dans E ".

2.2 Dimension finie

- ☐ Définition de " E est de dimension finie".
- ☐ Théorème de la base incomplète, version faible : si E est de dimension finie,
 - De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E ;
 - Toute famille libre de E peut être complétée en base de E . (Aussi appelé théorème de la base extraite.)(En conséquence, E admet au moins une base)
- ☐ Si $\mathcal{L}$ est une famille libre et $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E , alors $\mathcal{L}$ a un nombre de vecteurs inférieur ou égal à celui de $\mathcal{G}$.
- ☐ Si E est de dimension finie, toute base de E a le même nombre d'éléments, qu'on note $\dim(E)$.
- ☐ Si E est de dimension n , toute famille libre de E a au plus n éléments, toute famille génératrice de E a au moins n éléments, et cas d'égalités : toute famille libre de n éléments est une base, toute famille génératrice de n éléments est une base. ([Question de cours, démonstration d'un des deux cas d'égalités exigible](#)).
- ☐ Si E est de dimension n , tout s.e.v. F de E est de dimension finie et majorée par n . De plus, si $\dim(F) = n$, alors $F = E$. ([Question de cours, démonstration du cas d'égalité exigible](#)).
- ☐ Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet (au moins) un supplémentaire ([Question de cours, démonstration exigible](#)).
- ☐ En dimension finie, formule de Grassmann : $\dim(F + G) = \dots$
- ☐ En dimension finie, deux autres caractérisations de la somme directe :
 - La concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de $F + G$;
 - $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$.
- ☐ En dimension finie, trois autres caractérisations de $E = F \oplus G$:
 - la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E ;
 - $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F \cap G = \{0_E\}$;
 - $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F + G = E$.

Note pour les colleurs : il n'y a pas encore eu beaucoup d'exercices sur les espaces vectoriels de dimension finie, commencer par des exercices concrets avec des espaces vectoriels "simples".