Programme de colle : du 28 avril au 4 mai

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

1 Séries

- ☐ Savoir que ce qu'on appelle "la série de terme général u_n" est notée $\sum u_n$ et que cela est la SUITE des SOMMES PARTIELLES : $\sum u_n = \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\geq 0}$ (ou si vous préférez, $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geq 0}$, les variables sont muettes). Définition analogue dans le cas où (u_n) n'est défini qu'à partir d'un rang n_0.
- ☐ Montrer que $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ ont même nature. (Question de cours).
- ☐ Définition du reste d'indice n d'une série, et écriture sous la forme d'une somme (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Toute combinaison linéaire de séries convergentes est convergente (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, et la réciproque est fausse (vocabulaire : série grossièrement divergente). (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et la réciproque est fausse (pour la réciproque fausse : on admettra que $\sum (-1)^n/n$ converge). (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Convergence et sommes des séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$. (Démonstration NON exigible).
- ☐ Notion de série à termes positifs, une série à terme positifs converge si et seulement si elle est majorée (c'est-à-dire s'il existe un majorant des sommes partielles). (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Si pour tout n, $0 \leq u_n \leq v_n$, alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi (et par contraposée si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge aussi). Encore vrai en supposant que $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.
- ☐ Si $u_n = o(v_n)$, que $\sum v_n$ est à termes positifs et converge, alors $\sum u_n$ converge aussi. (Question de cours : donner un contre-exemple de ce théorème si on ne suppose plus que $v_n \geq 0$.
- ☐ Si $u_n \sim v_n$, que $\sum v_n$ est à termes positifs et converge, alors $\sum u_n$ converge aussi (qui peut être prouvé comme conséquence du point précédent)
- ☐ Connaître la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de $\alpha > 0$. (Démonstration NON exigible).
- ☐ Convergence et somme de séries exponentielles. (Démonstration NON exigible).
- ☐ Séries télescopiques : $\sum u_{n+1} - u_n$ et (u_n) ont même nature. (Question de cours, démonstration exigible).

2 Espaces vectoriels, dimension finie

F et G sont deux s.e.v. d'un e.v. E.

2.1 Somme de sous-espaces vectoriels dans le cas général

- ☐ Définition de $F + G$.
- ☐ Définition de "F et G sont en somme directe", et caractérisation avec l'intersection réduite à 0_E. (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Définition de "F et G sont supplémentaires dans E" : $E = F \oplus G$. Comprendre que cela revient à montrer, pour tout $u \in E$, qu'il existe $(f, g) \in F \times G$ tels que $u = f + g$ ($E = F + G$), et que de plus ce couple (f, g) est unique (F et G sont en somme directe). Bien sûr on peut aussi penser à utiliser la caractérisation de la somme directe avec l'intersection.
- ☐ Généralisation, avec la définition de $F_1 + \cdots + F_p$, de "$F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe", de "$F_1, \ldots, F_p$ sont supplémentaires dans E.

2.2 Dimension finie

☐ Définition de "E est de dimension finie".

☐ Théorème de la base incomplète, version faible : si E est de dimension finie,
- — De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E ;
- — Toute famille libre de E peut être complétée en base de E. (Aussi appelé théorème de la base extraite.)

(En conséquence, E admet au moins une base)

☐ Si $\mathcal{L}$ est une famille libre et $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathcal{L}$ a un nombre de vecteurs inférieur ou égal à celui de $\mathcal{G}$.

☐ Si E est de dimension finie, toute base de E a le même nombre d'éléments, qu'on note $\dim(E)$.

☐ Si E est de dimension n, toute famille libre de E a au plus n éléments, toute famille génératrice de E a au moins n éléments, et cas d'égalités : toute famille libre de n éléments est une base, toute famille génératrice de n éléments est une base. (Question de cours, démonstration d'un des deux cas d'égalités exigible).

☐ Si E est de dimension n, tout s.e.v. F de E est de dimension finie et majorée par n. De plus, si $\dim(F) = E$, alors $F = E$. (Question de cours, démonstration du cas d'égalité exigible).

☐ Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet (au moins) un supplémentaire (Question de cours, démonstration exigible).

☐ En dimension finie, formule de Grassmann : $\dim(F + G) = ...$

☐ En dimension finie, deux autres caractérisations de la somme directe :
- — La concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de $F + G$;
- — $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$.

☐ En dimension finie, trois autres caractérisations de $E = F \oplus G$:
- — la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E ;
- — $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F \cap G = \{0_E\}$;
- — $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F + G = E$.

☐ Définition de $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p)$. Avoir compris que pour calculer le rang, il n'est pas toujours nécessaire de donner une base explicite, mais que l'on peut aussi déterminer la dimension grâce à des inégalités (en exploitant la propriété déjà mentionnée du nombre de vecteurs d'une famille libre et d'une famille génératrice).

3 Probabilités dans un univers quelconque

☐ Définition, pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}$, de $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$ et de $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k$; interprétation (savoir écrire, par exemple, l'événement "n'obtenir que des Piles"). Notion de suite d'ensembles croissante/décroissante au sens de l'inclusion.

☐ $\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$ est croissante ; $\left(\displaystyle\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$ est décroissante ; $\left(\displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$ est décroissante ; $\left(\displaystyle\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$ est croissante.(Question de cours, démonstration de l'un des quatre exigible).

☐ Savoir énoncer précisément la propriété de σ-additivité, montrer que cela implique notamment la propriété additivité d'une famille finie d'événements incompatibles.(Question de cours, démonstration exigible).

☐ Notions d'événements presque-sûrs et négligeables.

☐ Savoir énoncer précisément la formule des probabilités totales (Question de cours).

☐ Savoir énoncer précisément le théorème de la limite monotone (Question de cours).

☐ Savoir énoncer précisément le corollaire du théorème de la limite monotone (où il n'y pas d'hypothèse de monotonie sur la suite d'événements) (Question de cours, et savoir le démontrer à l'aide du théorème de la limite monotone).

☐ Définition de l'indépendance mutuelle d'une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements.