Programme de colle : du 5 mai au 10 mai

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

1 Probabilités dans un univers quelconque

- ☐ Définition, pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}$, de $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$ et de $\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k$; interprétation (savoir écrire, par exemple, l'événement "n'obtenir que des Piles"). Notion de suite d'ensembles croissante/décroissante au sens de l'inclusion.
- ☐ $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$ est croissante ; $\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$ est décroissante ; $\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$ est décroissante ; $\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$ est croissante.(Question de cours, démonstration de l'un des quatre exigible).
- ☐ Savoir énoncer précisément la propriété de σ-additivité, montrer que cela implique notamment la propriété additivité d'une famille finie d'événements incompatibles.(Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Notions d'événements presque-sûrs et négligeables.
- ☐ Savoir énoncer précisément la formule des probabilités totales (Question de cours).
- ☐ Savoir énoncer précisément le théorème de la limite monotone (Question de cours).
- ☐ Savoir énoncer précisément le corollaire du théorème de la limite monotone (où il n'y pas d'hypothèse de monotonie sur la suite d'événements) (Question de cours, et savoir le démontrer à l'aide du théorème de la limite monotone).
- ☐ Définition de l'indépendance mutuelle d'une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements.

2 Variables aléatoires discrètes

- ☐ Définition d'une variable aléatoire discrète. Dans la suite, X est une variable aléatoire discrète.
- ☐ $([X = x])_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En conséquences, la série $\sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x)$ converge et sa somme vaut 1.
- ☐ Si on connaît la loi de X, savoir en déduire pour tout $D \subset \mathbb{R}$, $P(X \in D)$ grâce à la formule $P(X \in D) = \sum_{x\in X(\Omega)\cap D} P(X = x)$.
- ☐ Existence d'une variable aléatoire d'une loi donnée (à quelle condition sur la famille de réels $(p_i)_{i\in I}$ peut-on considérer une variable aléatoire X vérifiant $P(X = x_i) = p_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$?)
- ☐ Définition de F_X, propriétés de base :
  - F_X est croissante (au sens large) ;
  - F_X a pour limite 0 en $-\infty$;
  - F_X a pour limite 1 en $+\infty$

  (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ X et Y ont la même loi si et seulement si X et Y ont la même fonction de répartition.
- ☐ Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, $P(X > a) = 1 - F_X(a)$ et $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Définition de l'indépendance mutuelle d'une famille de variables aléatoires discrètes.
- ☐ En notant $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ avec les x_i sont deux à deux distincts (remarquez que souvent, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $x_i = i$) :
  On dit que X admet une espérance si $\sum x_n P(X = x_n)$ **converge absolument**.
  Dans ce cas, $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$; ce qu'on note aussi : $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$.
- ☐ Linéarité de l'espérance. Notation $X \leq Y$ signifiant : pour tout $w \in \Omega, X(w) \leq Y(w)$. a) Si X admet une espérance et que $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$. b) Si $X \leq Y$, et que X et Y admettent une espérance, alors $E(X) \leq E(Y)$. c) Si X admet une espérance, alors $|X|$ aussi et $E(X) \leq E(|X|)$. (Question de cours, en EC1A démonstration exigible des implications a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c)).
- ☐ Existence d'une espérance par domination.

- ☐ Soit g une fonction à valeurs réelles, et définie (au moins) sur $X(\Omega)$.
  Si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X=x)$ converge absolument, alors $g(X)$ admet une espérance et

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X=x)$$

- ☐ Existence et calcul d'une espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.
- ☐ Propriété : Si X^2 admet une espérance, alors la variance $V(X) = E((X - E(X))^2)$ est bien définie (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Formule de Kœnig-Huygens.
- ☐ Variance d'une somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
- ☐ Loi de Poisson (connaître la formule explicite pour $P(X = k)$). Espérance, variance. (Question de cours, démonstration exigible pour l'espérance).
- ☐ Loi géométrique (connaître la formule explicite pour $P(X = k)$). Espérance, variance. (Question de cours, démonstration exigible pour l'espérance).
- ☐ Énoncer précisément le théorème de Poisson. Savoir s'en servir pour approximer des probabilités de lois binomiales, et pour justifier pourquoi certaines variables aléatoires sont modélisées par des variables de Poisson.

3 Formules de Taylor et développements limités

Pas d'exercices à ce stade, mais seulement des questions de cours :

- ☐ Énoncer précisément la formule de Taylor reste intégral, l'illustrer sur un exemple concret (au choix du colleur) (Question de cours)
- ☐ Énoncer précisément l'inégalité de Taylor-Lagrange, l'illustrer sur un exemple concret (au choix du colleur) (Question de cours)