

Programme de colle : du 12 mai au 17 mai

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

1 Formules de Taylor

- Formule de Taylor reste-intégral pour une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle (Question de cours, démonstration exigible à l'ordre 1 puis 2 (pour simplifier)).
- Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle (Question de cours, démonstration exigible en admettant la formule de Taylor reste-intégral).
- Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle (Question de cours, pas de démonstration exigible).

2 Développements limités

- Développements limités usuels : $e^x, \cos(x), \sin(x), (1+x)^\alpha$ (α réel), $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}, \ln(1+x)$. (Question de cours, donner le DL à l'ordre n de deux d'entre eux, et expliquer comment on peut le retrouver).
- Savoir vérifier la cohérence d'un DL : en regardant les deux premiers coefficients ($c_0 = f(a), c_1 = f'(a)$); en vérifiant la parité/l'imparité du polynôme dans le cas d'un DL en 0, si jamais la fonction est paire/impaire.
- Déterminer un équivalent à l'aide d'un DL, y penser pour calculer des limites.
- Principe "absorbant" : un $o_{x \rightarrow 0}(x^i)$ "absorbe" tous les x^j et $o_{x \rightarrow 0}(x^j)$ pour $j > i$.
- Conséquence : savoir déduire d'un DL de f et un DL de g un DL de fg et $f+g$.
- Savoir se ramener à un DL en zéro pour déterminer un DL en a , soit en étudiant $f(a+h)$ puis en appliquant cela à $h = x-a$, soit directement en écrivant $f(x) = f(a+x-a)$ et en utilisant $x-a \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.
- Savoir étudier la position locale de la courbe représentative d'une fonction par rapport à sa tangente.
- Connaître une condition suffisante pour que x_0 , un point critique d'une fonction f de classe \mathcal{C}^2 , soit un extremum local.
- Savoir déterminer une asymptote oblique à la courbe représentative de f en l'infini ainsi que la position relative de la courbe représentative de f par rapport à l'asymptote au voisinage de l'infini (en EC1B).

3 Projecteurs, applications linéaires en dimension finie

- Caractérisation des projecteurs : pour $p \in \mathcal{L}(E)$, $p \circ p = p$ si, et seulement si, p est un projecteur (aussi appelé projection). Dans ce cas, $\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$ et p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$. (Question de cours, énoncer cette caractérisation, et au choix du colleur/colleuse, démonstration de \Rightarrow , ou \Leftarrow , ou du "Dans ce cas...").
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E de dimension finie. L'image d'une base de E par f est :
 - une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ (et donc $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, inférieure ou égale à $\dim(E)$);
 - une famille libre si et seulement si f est injective,
 - une base de F si et seulement si f est bijective (et donc si f est bijective, $\dim(E) = \dim(F)$).(Question de cours, énoncer et prouver un des points).
- Théorème du rang. (Question de cours, l'énoncer précisément).
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on suppose E, F de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$. Il suffit de montrer que f est injective OU surjective, pour montrer que f est bijective. (Question de cours, énoncer ce résultat sous forme d'équivalences, démonstration d'une des implications).
- Un s.e.v. d'un espace vectoriel de dimension finie est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle (Question de cours, énoncer ce résultat, démonstration d'une des implications).