Programme de colle : du 19 mai au 23 mai

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

1 Formules de Taylor

- ☐ Formule de Taylor reste-intégral pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle (Question de cours, démonstration exigible à l'ordre 1 puis 2 (pour simplifier).
- ☐ Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle (Question de cours, démonstration exigible en admettant la formule de Taylor reste-intégral).
- ☐ Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle (Question de cours, pas de démonstration exigible).

2 Développements limités

En EC1A, pas de composition de DLs (comme par exemple $\ln(1 + x + o(x))$), mais savoir substituer, par exemple on a le DL de $\ln(1 - x^2)$

- ☐ Développements limités usuels : $e^x, \cos(x), \sin(x), (1+x)^\alpha$ (α réel), $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}, \ln(1+x)$. (Question de cours, donner le DL à l'ordre n de deux d'entre eux, et expliquer comment on peut le retrouver).
- ☐ Savoir vérifier la cohérence d'un DL : en regardant les deux premiers coefficients ($c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$) ; en vérifiant la parité/l'imparité du polynôme dans le cas d'un DL en 0, si jamais la fonction est paire/impaire.
- ☐ Déterminer un équivalent à l'aide d'un DL, y penser pour calculer des limites.
- ☐ Principe "absorbant" : un $o_{x\to 0}(x^i)$ "absorbe" tous les x^j et $o_{x\to 0}(x^j)$ pour $j > i$.
- ☐ Conséquence : savoir déduire d'un DL de f et un DL de g un DL de fg et $f + g$.
- ☐ Savoir se ramener à un DL en zéro pour déterminer un DL en a, soit en étudiant $f(a+h)$ puis en appliquant cela à $h = x - a$, soit directement en écrivant $f(x) = f(a + x - a)$ et en utilisant $x - a \underset{x\to a}{\to} 0$.
- ☐ Savoir étudier la position locale de la courbe représentative d'une fonction par rapport à sa tangente.
- ☐ Connaître une condition suffisante pour que x_0, un point critique d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$, soit un extremum local.
- ☐ Savoir déterminer une asymptote oblique à la courbe représentative de f en l'infini ainsi que la position relative de la courbe représentative de f par rapport à l'asymptote au voisinage de l'infini (en EC1B).

3 Projecteurs, applications linéaires en dimension finie

- ☐ Caractérisation des projecteurs : pour $p \in \mathcal{L}(E)$, $p \circ p = p$ si, et seulement si, p est un projecteur (aussi appelé projection). Dans ce cas, $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. (Question de cours, énoncer cette caractérisation, et au choix du colleur/colleuse, démonstration de $\Rightarrow$, ou $\Leftarrow$, ou du "Dans ce cas...").
- ☐ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E de dimension finie. L'image d'une base de E par f est :
  - — une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ (et donc $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, inférieure ou égale à $\dim(E)$) ;
  - — une famille libre si et seulement si f est injective,
  - — une base de F si et seulement si f est bijective (et donc si f est bijective, $\dim(E) = \dim(F)$).

  (Question de cours, énoncer et prouver un des points).
- ☐ Théorème du rang. (Question de cours, l'énoncer précisément).
- ☐ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on suppose E, F de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$. Il suffit de montrer que f est injective OU surjective, pour montrer que f est bijective. (Question de cours, énoncer ce résultat sous forme d'équivalences, démonstration d'une des implications).
- ☐ Rappel et propriétés du rang d'une application linéaire ou d'une famille de vecteurs (démonstrations exigibles en EC1B) :
  - ☐ f injective ssi $\mathrm{Rg}(f) =$....
  - ☐ f surjective ssi $\mathrm{Rg}(f) =$....
  - ☐ f bijective ssi son $\mathrm{Rg}(f) =$....

- ☐ Un s.e.v. d'un espace vectoriel de dimension finie est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle (Question de cours, énoncer ce résultat, démonstration d'une des implications).

4 Représentation matricielle des applications linéaires en dimension finie

Dans cette partie, donner des exercices d'application directe du cours, avant de passer éventuellement progressivement à des exercices plus élaborés.

- ☐ Définition de $Mat_B(x)$ où x est un vecteur de E, de $Mat_{C,B}(f)$ où $f : E \to F$, B base de E, C base de F.
- ☐ $Mat_C(f(x)) = Mat_{C,B}(f)Mat_B(x)$ (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ $Mat_{D,B}(g \circ f) = Mat_{D,C}(g)Mat_{C,B}(f)$ (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Conséquences de cette propriété :
  - — Si f est un endomorphisme, matrice de f^k, un polynôme est annulateur de f ssi il est annulateur de la matrice de f.
  - — Si $f : E \to F$ avec $\dim(E) = \dim(F)$, f est inversible ssi $Mat_{C,B}(f)$ est inversible, et dans ce cas $Mat_{B,C}(f^{-1}) = Mat_{C,B}(f)$.
- ☐ Notions d'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- ☐ Notions de matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$: $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id_E)$.
  Comment déterminer les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{C}$ à partir des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide de cette matrice ?
- ☐ Bijection (par passage aux coordonnées) entre le noyau de f et le noyau de la matrice $Mat_{C,B}(f)$. Bijection (par passage aux coordonnées) entre l'image de f et l'image de la matrice $Mat_{C,B}(f)$. En conséquence, le rang de f est le rang de $Mat_{C,B}(f)$.
- ☐ Le rang d'une famille de vecteurs de E est le rang d'une matrice de ces vecteurs.
  Rappel :
  - ⋆ *la famille est libre ssi son rang est égal au nombre de vecteurs de la famille (donc au nombre de colonnes d'une matrice associée)*
  - ⋆ *la famille est génératice de E ssi son rang est égal à la dimension de E (donc au nombre de lignes d'une matrice associée)*
  - ⋆ *la famille est une base de E ssi son rang est égal à la dimension de E et au nombre de vecteurs de la famille (donc si la matrice associée est carrée et que son rang est égal à sa taille)*
- ☐ Calcul pratique du rang d'une matrice : propriété $rg(A) = rg(A^t)$, conséquences : opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes qui ne changent pas le rang. Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de pivots.
- ☐ Théorème du rang pour les matrices