Programme de colle : du 2 juin au 7 juin

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

1 Projecteurs, applications linéaires en dimension finie

- ☐ Caractérisation des projecteurs : pour $p \in \mathcal{L}(E)$, $p \circ p = p$ si, et seulement si, p est un projecteur (aussi appelé projection). Dans ce cas, $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. (Question de cours, énoncer cette caractérisation, et au choix du colleur/colleuse, démonstration de $\Rightarrow$, ou $\Leftarrow$, ou du "Dans ce cas...").
- ☐ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E de dimension finie. L'image d'une base de E par f est :
  — une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ (et donc $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, inférieure ou égale à $\dim(E)$) ;
  — une famille libre si et seulement si f est injective,
  — une base de F si et seulement si f est bijective (et donc si f est bijective, $\dim(E) = \dim(F)$).
  (Question de cours, énoncer et prouver un des points).
- ☐ Théorème du rang. (Question de cours, l'énoncer précisément).
- ☐ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on suppose E, F de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$. Il suffit de montrer que f est injective OU surjective, pour montrer que f est bijective. (Question de cours, énoncer ce résultat sous forme d'équivalences, démonstration d'une des implications).
- ☐ Rappel et propriétés du rang d'une application linéaire ou d'une famille de vecteurs (démonstrations exigibles) :
  - ☐ f injective ssi $\mathrm{Rg}(f) =$....
  - ☐ f surjective ssi $\mathrm{Rg}(f) =$....
  - ☐ f bijective ssi son $\mathrm{Rg}(f) =$....
- ☐ Un s.e.v. d'un espace vectoriel de dimension finie est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle (Question de cours, énoncer ce résultat, démonstration d'une des implications).

2 Représentation matricielle des applications linéaires en dimension finie

- ☐ Définition de $Mat_B(x)$ où x est un vecteur de E, de $Mat_{C,B}(f)$ où $f : E \to F$, B base de E, C base de F.
- ☐ $Mat_C(f(x)) = Mat_{C,B}(f)Mat_B(x)$ (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ $Mat_{D,B}(g \circ f) = Mat_{D,C}(g)Mat_{C,B}(f)$ (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Conséquences de cette propriété :
  — Si f est un endomorphisme, matrice de f^k, un polynôme est annulateur de f ssi il est annulateur de la matrice de f.
  — Si $f : E \to F$ avec $\dim(E) = \dim(F)$, f est inversible ssi $Mat_{C,B}(f)$ est inversible, et dans ce cas $Mat_{B,C}(f^{-1}) = Mat_{C,B}(f)$.
- ☐ Notions d'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- ☐ Notions de matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$: $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id_E)$.
  Comment déterminer les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{C}$ à partir des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide de cette matrice ?
- ☐ Bijection (par passage aux coordonnées) entre le noyau de f et le noyau de la matrice $Mat_{C,B}(f)$. Bijection (par passage aux coordonnées) entre l'image de f et l'image de la matrice $Mat_{C,B}(f)$. En conséquence, le rang de f est le rang de $Mat_{C,B}(f)$.
- ☐ Le rang d'une famille de vecteurs de E est le rang d'une matrice de ces vecteurs.
  Rappel :
  - ⋆ *la famille est libre ssi son rang est égal au nombre de vecteurs de la famille (donc au nombre de colonnes d'une matrice associée)*
  - ⋆ *la famille est génératice de E ssi son rang est égal à la dimension de E (donc au nombre de lignes d'une matrice associée)*
  - ⋆ *la famille est une base de E ssi son rang est égal à la dimension de E et au nombre de vecteurs de la famille (donc si la matrice associée est carrée et que son rang est égal à sa taille)*

- ☐ Calcul pratique du rang d'une matrice : propriété $rg(A) = rg(A^t)$, conséquences : opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes qui ne changent pas le rang. Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de pivots.
- ☐ Théorème du rang pour les matrices

3 Intégrales généralisées

Notion d'intégrale généralisée (ou d'intégrale impropre)

- **Cas d'une impropreté** on considère $f : [a, b[$ continue (impropreté en b).
  - ☐ Pour f continue sur $[a, b[$, définition de $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Sinon on dit que l'intégrale diverge.
  - ☐ Définition similaire pour f continue sur $]a, b]$.
  - ☐ Cas particulier de convergence pour b fini :
    convergence de $\int_a^b f(t)\,dt$ quand f admet une limite finie en b (c'est-à-dire f prolongeable continuement en b) (Démonstration à connaître)
  - ☐ Cas particulier de divergence pour $b = +\infty$ (ou $a = -\infty$) :
    si f admet une limite non nulle en $b = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) alors $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge.
    ⚠ Ce n'est pas parce que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge : savoir donner un contre exemple.
    ⚠ Ce n'est pas parce que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: la fonction f peut ne pas admettre de limite.
- **Cas d'impropretés aux deux bornes** : f continue sur $]a, b[$.
  - ☐ On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge lorsqu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent.
    Cela revient à l'étude de deux intégrales impropres qui n'ont chacune qu'une impropreté.
  - ☐ La définition précédente est équivalente à : "pour tout $c \in]a, b[$, $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent."
    Comprendre que cela vient de la relation de Chasles.
  - ☐ La définition précédente est équivalente à "il existe $(c, c') \in]a, b[^2$ tel que $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_{c'}^b f(t)\,dt$ converge.
    Comprendre que cela vient de la relation de Chasles.
- **Cas d'impropretés multiples entre les bornes de l'intégrale**
  - ☐ Connaître la définition et savoir étudier ce genre d'intégrales.
    On découpe l'intervalle en intervalles ouverts avec des impropretés seulement aux bornes de ces intervalles

Propriétés de signes et calculs sur les intégrales impropres

- **Intégrales impropres et inégalités**
  ⚠Pour les trois propriétés suivantes il est nécessaire d'avoir prouvé au préalable la convergence des intégrales : en effet $\int_a^b f(t)dt$ n'est un réel bien défini que si l'intégrale est convergente, sinon écrire $\int_a^b f(t)dt = ...$ ou $\geq ...$ n'a aucun sens.
  - ☐ Positivité. Cas d'égalité pour la positivité. *Savoir penser à la contraposée du cas d'égalité : si f (positive) n'est pas identiquement nulle, l'intégrale n'est pas nulle*
  - ☐ Savoir déduire de la positivité la propriété de croissance de l'intégrale.
  - ☐ Savoir déduire de la positivité et du cas d'égalité de la positivité la stricte croissance de l'intégrale : si pour tout $t \in [a, b[, f(t) \leq g(t)$, qu'il existe $t \in]a, b[$ tel que $f(t) \neq g(t)$ et que les intégrales convergent, alors $\int_a^b f(t)dt < \int_a^b g(t)dt$.
- **Des propriétés de calcul qui donnent la convergence d'intégrales et potentiellement leurs valeurs**
  - ☐ Inégalité triangulaire : ⚠Nécessite la convergence absolue de l'intégrale.
  - ⋆ La convergence absolue implique la convergence.
    Permet de se ramener à l'étude de la convergence de l'intégrale d'une fonction positive.
  - ☐ Linéarité sur les intégrales impropres : Si $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent, alors $\int_a^b \lambda f(t) + g(t)\,dt$ converge et vaut .... ⚠Bien vérifier la convergence des intégrales de f et g.
    Remarquer qu'un des résultats de la linéarité est de donner la convergence de $\int_a^b \lambda f(t) + g(t)\,dt$, si on sait que $\int_a^b f(t)\,dt$

et $\int_a^b g(t)\,dt$ *convergent*

- ☐ Relation de Chasles : Si $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et vaut ....
- ☐ Une conséquence de la relation de Chasles : Si f est continue sur $[a, b[$, alors pour tout $c \in [a, b[$, $\int_c^b f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ ont même nature. (Démonstration à connaître).
- ☐ Changement de variables : les intégrales sont de même nature.

  ⚠Attention à vérifier que l'une des deux converge avant d'écrire qu'elles sont égales. Le changement de variable garantit en effet que si les intégrales convergent (il suffit de vérifier une des deux car elles ont même nature), alors elles sont égales, mais on ne saurait écrire des égalités entre des nombres réels qui ne sont pas bien définis.
- ☐ Intégration par parties : ⚠il n'y a pas de théorèmes spécifiques, il faut se ramener à un segment sur lequel la fonction est continue, faire l'IPP comme au premier chapitre sur les intégrales puis faire tendre les bornes.

- **Dérivées par rapport à une borne**
  - ⋆ Pour une impropreté en b et tel que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge : savoir prouver la dérivabilité et calculer la dérivée de $x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$.
  - ⋆ Pour une impropreté en a et tel que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge : savoir prouver la dérivabilité et calculer la dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.

  Ce qui se fait à l'aide de la relation de Chasles et du théorème fondamental de l'analyse.

Fonctions positives et critères de comparaison

- **Un critère fondamental :** (Démonstration à connaître).
  - ☐ Pour f continue et **positive** sur $[a, b[$, $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée.
  - ☐ Pour f continue et **positive** sur $[a, b[$, $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$ est majorée.
- **Des critères de comparaison :**

  Les critères sont donnés ici pour f continue sur $[a, b[$, c'est à dire que $\int_a^b f(t)dt$ a UNE impropreté en b (critères similaires si l'impropreté est en a, mais attention ces critères sont pour UNE impropreté, s'il y en a plusieurs penser à découper l'intégrale en intégrales ayant chacune une impropreté).
  - ☐ Si, au voisinage de b, $0 \leq f(t) \leq g(t)$, et que $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
  - ☐ Si g est positive (a minima au voisinage de b), et que $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ et $\int_a^b f(t)\,dt$ sont de même nature.
  - ☐ Si g est positive (a minima au voisinage de b), que $f(t) = \underset{t\to b}{\mathrm{o}}(g(t))$ et que $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Intégrales impropres de références

- **Critère de Riemann** (Démonstration à connaître). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - ☐ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$
  - ☐ $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$
  - ☐ $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$

  Cas particulier important pour $a = 0, b = 1$: $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$
- **Intégrale d'exponentielle** (Démonstration à connaître). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  - ☐ $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt$ converge ssi $\lambda > 0$. Dans ce cas connaître sa valeur.