Compétences - Suites

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

TOUT LE PROGRAMME DE LA SEMAINE PRECEDENTE SUR LES APPLICATIONS, ET :

1 Généralités

- ☐ Notation : faire la différence entre le terme de rang n : u_n et la suite notée u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ ou (u_n).
- ☐ Notion de "à partir d'un certain rang"
- Définition explicite et par récurrence d'une suite
- Encadrement d'une suite
  - ☐ Définition de suite majorée, minorée et bornée.
  - ☐ Propriété : (u_n) est bornée si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq A$ (démonstration exigible).
- Monotonie
  - ☐ Définition de suites (strictement) croissantes, décroissantes, monotones, constantes, stationnaires.
  - ☐ Savoir déterminer la monotonie d'une suite dans des cas concrets.

2 Limites

- Suites convergentes
  - ☐ Définition de suite convergente : savoir représenter la définition sur un dessin et faire les liens entre les éléments du dessin et de la définition.
  - ☐ Unicité de la limite dans le cas convergent (démonstration exigible)
  - ☐ Equivalence entre (u_n) admet une limite ℓ et $(|u_n - \ell|)$ converge vers zéro.
  - ☐ Toute suite réelle convergente est bornée (démonstration exigible)
- Suites divergentes
  - ☐ Définition de suite divergente. Connaître des exemples de suites divergentes qui ne tendent pas vers $+\infty$ ou $-\infty$. Savoir en dessiner.
  - ☐ Définition de "suite tendant vers $+\infty$" et "suite tendant vers $-\infty$". Savoir dessiner des exemples de telles suites non monotones à partir d'un certain rang.
- ☐ Limites des suites usuelles : (n^α) (suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$), (q^n) (suivant la valeur de $q \in \mathbb{R}$).
- Opérations sur les limites
  - ⋆ Somme
    - ☐ Connaître et comprendre les règles d'addition. Bien repérer les formes indéterminées.
    - ☐ Connaître la démonstration dans le cas où les deux suites convergent (démonstration exigible)
  - ⋆ Multiplication
    - ☐ Connaître et comprendre les règles de multiplication. Bien repérer les formes indéterminées.
  - ⋆ Passage à l'inverse
    - ☐ Connaître et comprendre les règles du passage à l'inverse. Bien repérer les formes indéterminées.
  - ⋆ Composition par une fonction
    - ☐ Théorème de composition : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et que f admet une limite en ℓ notée L, et bien évidemment que pour tout n, u_n est dans le domaine de définition de f, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$ (tout cela avec ℓ et L éventuellement infinis).
    - ☐ Cas particulier : si f est continue en ℓ [on suppose donc ℓ fini, et dans le domaine de définition de f], alors f admet une limite en ℓ : $f(\ell)$. On peut appliquer directement le corollaire suivant : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et que f est continue en ℓ, et bien évidemment que pour tout n, u_n est dans le domaine de définition de f, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.
    - ☐ Limites de type taux de variation à connaître (comme par exemple la limite en 0 de $\dfrac{\sin(x)}{x}$). A savoir démontrer avec la définition de la dérivée comme la limite du taux de variation.
  - Limites et inégalités
  - ☐ Théorème de convergence monotone.

- Passage à la limite dans les inégalités
  - ☐ Si (u_n) converge vers $\ell > 0$ alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$. (démonstration exigible, mais pas encore en EC1A)
  - ☐ La propriété se généralise : si (u_n) converge vers ℓ tel que $m < \ell < M$ alors à partir d'un certain rang $m < u_n < M$. A savoir démontrer à partir de la propriété ci-dessus.
  - ☐ Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' et que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang alors $\ell \leq \ell'$. (démonstration exigible, mais pas encore en EC1A)
    Attention ! $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang n'implique PAS que $\ell < \ell'$ (trouver un contre-exemple), en revanche, comme $u_n < v_n$ implique $u_n \leq v_n$, cela implique $\ell \leq \ell'$.
    Attention ! pour appliquer le théorème il faut avoir prouvé que les suites u et v sont convergentes
  - ☐ Savoir appliquer ce théorème, en particulier, avec (v_n) constante : si (u_n) converge vers ℓ et qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq C$, alors $\ell \leq C$ (idem avec $\geq$).
- ☐ Théorème de comparaison (démonstration exigible, mais pas encore en EC1A)
- ☐ Théorème des gendarmes (démonstration exigible, mais pas encore en EC1A)
- ☐ Connaître ses limites de croissances comparées.
- Suites adjacentes
  - ☐ Connaître la définition (savoir en faire un dessin)
  - ☐ Théorème des suites adjacentes (convergence), lien avec le dessin (démonstration exigible)

- Limites des suites extraites
  - ☐ Si u admet une limite ℓ alors toute suite extraite de u admet comme limite ℓ. Application pour montrer qu'une suite diverge, par exemple divergence de $((-1)^n)$.
  - ☐ (u_n) admet une limite si et seulement si ses suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent une même limite.

3 Suites particulières

- Suites arithmétiques
  - ☐ Relation entre u_{n+1} et u_n (attention la raison ne doit pas dépendre de n).
  - ☐ Formule explicite en fonction de n (savoir la déterminer quand le premier terme de la suite n'est pas de rang 0).
  - ☐ Formule pour la somme du rang p au rang q à connaître et savoir retrouver
- Suites géométriques
  - ☐ Relation entre u_{n+1} et u_n (attention la raison ne doit pas dépendre de n).
  - ☐ Formule explicite en fonction de n (savoir la déterminer quand le premier terme de la suite n'est pas de rang 0).
  - ☐ Formule pour la somme du rang p au rang q à connaître et savoir retrouver
- Suites arithmético-géométriques :
  - ☐ Relation entre u_{n+1} et u_n. Attention les coefficients ne doivent pas dépendre de n.
  - ☐ Connaître la méthode d'étude et savoir la mettre en œuvre.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants : (classe de EC 1B uniquement, pour la classe de EC 1A : la semaine prochaine)
  - ☐ Formule par récurrence. Attention les coefficients ne doivent pas dépendre de n.
  - ☐ Connaître la méthode d'étude et savoir la mettre en œuvre.
- Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$. **La méthode générale d'étude n'est pas à connaître et le fameux théorème du point fixe n'est pas au programme et ne doit pas être cité**.

☐ Dans le cas où la suite converge vers ℓ, et que f est continue en ℓ, savoir montrer que $\ell = f(\ell)$.

☐ Savoir tracer les termes successifs de (u_n) à l'aide du tracé de $y = x$ et de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$.

☐ Avoir bien compris et avoir vu sur des exemples que ce n'est pas parce que f est croissante que (u_n) l'est ou parce que f est décroissante que (u_n) l'est.

☐ On peut garder en tête que si l'on connaît les variations de f, les variations de (u_n), (u_{2n}) ou (u_{2n+1}) selon les cas peuvent se prouver par récurrence.