Compétences - Polynômes

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

TOUT LE PROGRAMME DE LA SEMAINE PRECEDENTE SUR LES SUITES, ET :

1 L'ensemble des polynômes, opérations sur les polynômes

- ☐ Définition d'un polynôme (les polynômes sont des fonctions). On travaille principalement (en EC1A) avec la notation x, par exemple $P(x) = x^2 + 1$, mais on peut aussi noter $P = X^2 + 1$ (pour les colleurs : on s'autorisera à confondre $P(x)$ et le polynôme P).
- ☐ Définition du degré (convention $\deg(0) = -\infty$) et $\mathbb{R}_n[x]$.
- ☐ Degré de λP en fonction de λ.
- ☐ $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$, et si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, il y a égalité. (Démonstration non exigible pour le moment).
- ☐ $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ (démonstration exigible).
- ☐ Expression de k-ième coefficient de PQ.
- ☐ Si $PQ = 0$, alors $P = 0$ ou $Q = 0$ (démonstration exigible).
- ☐ Savoir donner un exemple de deux fonctions f, g telles que $fg = 0$ mais $f \neq 0$ et $g \neq 0$.
- ☐ $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$ (pas de démonstration exigée, mais savoir donner des exemples)
- ☐ Pour $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, savoir calculer P', et plus généralement $P^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (démonstration exigible).
- ☐ $P^{(k)}(0) = k!a_k$ (démonstration exigible).
- ☐ Formule de Taylor en 0 et plus généralement en $\alpha \in \mathbb{R}$. Démonstration exigible en colle (pour les EC 1A) : à partir de la formule de Taylor en 0, en posant $Q(x) = P(x + \alpha)$, en déduire la formule de Taylor en α.
- ☐ La formule de Leibniz (démonstration non exigible)

2 Division euclidienne

- ☐ Définition de B divise A, si A non nul, $\deg(B) \leq \deg(A)$ (démonstration exigible).
- ☐ Définition du reste et du quotient de la division euclidienne de A par $B \neq 0$.
- ☐ Savoir poser et effectuer à la main la division euclidienne.
- ☐ Méthode pour trouver le reste R en évaluant la relation $A = BQ + R$ en des racines de B.
- ☐ Notion de polynôme irréductible.
- ☐ Savoir que tout polynôme se factorise en produit de polynômes de degrés 1 ou 2 (car il se factorise en produit de polynômes irréductibles) (démonstration non exigible)

3 Racines

- ☐ Le polynôme $x - \alpha$ divise P ssi $P(\alpha) = 0$ (démonstration exigible).
- ☐ Définition d'une racine α de P de multiplicité r (il existe Q, $P(x) = (x - \alpha)^r Q(x)$ et $Q(\alpha) \neq 0$).
- ☐ Une racine α de P a multiplicité r ssi $P(\alpha), P^{(1)}(\alpha), \ldots, P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$. Démonstration exigible du sens réciproque.
- ☐ Soit P un polynôme et $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ des racines deux à deux distinctes de P de multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Alors le polynôme $(x-\alpha_1)^{m_1} \times \cdots \times (x-\alpha_r)^{m_r}$ divise P (admis). En conséquence, le nombre de racines comptées avec multiplicités est inférieur ou égal à $\deg(P)$ (démonstration exigible, en se servant de la factorisation admise).
- ☐ Savoir donner des exemples où il n'y a pas égalité.
- ☐ Relations coefficients-racines pour les polynômes de degré 2 (démonstration exigible).
- ☐ Un polynôme P de degré inférieur ou égal à n possédant au moins $n + 1$ racines comptées avec leur multiplicité est nul.
- ☐ Conséquence : un polynôme P possédant une infinité de racines est nul.