

Compétences - Limites

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

TOUT LE PROGRAMME DE LA SEMAINE PRÉCÉDENTE SUR LES POLYNÔMES, ET :

On considère I un intervalle, $x_0 \in I$, et f définie sur I sauf éventuellement en x_0 , c'est-à-dire : le domaine de définition, noté D , de f , est soit I , soit $I \setminus \{x_0\}$.

1 Définitions

- Notion, pour une propriété portant sur la fonction f , d'être vraie "au voisinage de x_0 ", ou "au voisinage de $+\infty$ " (si D non majoré...) ou "au voisinage de $-\infty$ " (si D non minoré...) (Démontrer proprement, pour un exemple simple concret, qu'une fonction satisfait une propriété "au voisinage de..." pourra constituer une question de cours.)
- Soient $a, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, définitions de : f admet L pour limite en a . (Cela donne 9 définitions suivant a, L , à chaque fois l'élève devra pouvoir donner la définition avec des mots, avec un dessin, et avec des quantificateurs.)
- Soit $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, définition de : f admet L pour limite à gauche en x_0 (condition : x_0 n'est pas l'extrémité gauche de D). Idem à droite. (Cela donne 6 définitions suivant L (et à gauche / à droite), à chaque fois l'élève devra pouvoir donner la définition avec des mots, avec un dessin, et avec des quantificateurs.)
- Savoir que s'il y a une limite en a , elle est unique, on peut donc dans ce cas parler de LA limite en a de f .

2 Limites de fonctions usuelles

- Savoir déterminer les asymptotes horizontales, verticales, et de la forme $y = ax + b$.
- Les limites des fonctions usuelles (x^n , $\frac{1}{x}$, $\tan(x)$, e^x , $\ln(x)$, x^r ($r \in \mathbb{R}^*$) aux points "intéressants".

3 Opérations sur les limites

- Limites d'une somme, d'un produit, de l'inverse, d'un quotient.
- Savoir énoncer précisément et expliquer la propriété sur la limite d'une composée de fonctions (quand f admet b pour limite en a , et que g admet c pour limite en b , que dire de $g \circ f$?) (Question de cours avoir énoncer précisément ce résultat)
- Savoir énoncer précisément et expliquer la propriété sur la limite de $f(u_n)$ quand (u_n) admet pour limite a et f admet b pour limite en a (Question de cours avoir énoncer précisément ce résultat)
- Conséquences : 2 façons (avec les suites) de prouver qu'une fonction f n'a PAS de limite en a (deux suites qui convergent vers a mais leurs images n'ont pas la même limite, ou bien une suite qui converge vers a mais avec les images qui divergent) (Question de cours : savoir énoncer, et expliquer/prouver d'où vient ce résultat)
- Croissances comparées : Quand x tend vers $+\infty$, $(\ln x)^\alpha \ll x^\beta \ll e^{\gamma x}$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$ (pour tous α, β, γ dans \mathbb{R}_+^*)
- Savoir reconnaître un taux d'accroissement (d'une fonction de référence) pour donner une limite

4 Théorèmes fondamentaux sur les limites

- Si une fonction admet une limite finie en a , elle est bornée au voisinage de a . Si cette limite est strictement positive, la fonction est strictement positive au voisinage de a .
- Savoir "passer une inégalité large à la limite" (Question de cours : savoir énoncer précisément ce résultat)
- Théorème des gendarmes (Question de cours : savoir énoncer précisément ce résultat)
- Théorème de comparaison (Question de cours : savoir énoncer précisément ce résultat)
- Théorème de la limite monotone (Question de cours : savoir énoncer précisément ce résultat)