Compétences - Matrices

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

TOUT LE PROGRAMME DE LA SEMAINE PRÉCÉDENTE SUR LA CONTINUITE, ET :

1 Systèmes linéaires

- ☐ Savoir échelonner puis résoudre un système linéaire (Question de cours : le faire dans un cas concret à 3 ou 4 inconnues)

2 Généralités

- ☐ Notations I_n, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notation $[A]_{i,j}$ pour le coefficient de la ligne i, colonne j de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont la même taille et tous leurs coefficients égaux.
- ☐ Matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, expression en fonction du coefficient d'indice (i,j) de $E_{k,l}$. Savoir retrouver l'expression de $E_{k,l}E_{k',l'}$.
- ☐ Définition d'une combinaison linéaire de matrices. Savoir expliquer pourquoi toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une combinaison linéaire des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. (Question de cours)
- ☐ Savoir énoncer précisément à quel condition sur les tailles de deux matrices A, B peut-on parler du produit AB, et donner dans ce cas la définition du coefficient d'indice (i,j) de AB. (Question de cours : définition plus un exemple)
- ☐ Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a $A = B$ si, et seulement si, $(\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX = BX)$.
- ☐ Propriétés de l'addition et la multiplication de matrices : on peut retenir que tout se passe comme attendu, sauf la commutativité (on n'a pas toujours $AB = BA$), et l'intégrité ($AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$).
- ☐ Savoir énoncer et prouver la propriété de distributivité. (Question de cours)
- ☐ Transposée d'une matrice, savoir démontrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ (Question de cours)

3 Matrices carrées

- ☐ Notion de matrices qui commutent entre elles.
- ☐ Formule pour les puissances d'une matrice diagonale.
- ☐ Savoir que la matrice I_n est le neutre pour la loi multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AI_n = I_nA = A$.
- ☐ Puissances de la matrice $J = (1)_{1\leq i,j\leq n}$.
- ☐ Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices qui commutent.
- ☐ Pour P un polynôme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définition de $P(A)$.
- ☐ Définition d'une matrice inversible, avec quatre assertions équivalentes :

  1. Il existe une matrice B carrée de taille n, pour tous vecteurs colonnes $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = Y \Leftrightarrow X = BY$.
  2. Pour tout vecteurs colonne $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.
  3. A peut être transformée, par des opérations élémentaires, en une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients sur la diagonale sont non nuls
  4. Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$

  Dans ce cas là, on dit que A est inversible, la matrice B des assertions 1 et 4 est la même, et est unique : c'est la matrice notée A^{-1}. Il faut savoir prouver 1. implique 4., 4. implique 1., 1 implique 2., et l'unicité de B quand l'assertion 4. est vérifiée. (Définition plus une des implications ou bien l'unicité, cela fait 4 questions de cours)

La notion de matrice inverse donnera lieu à des questions de cours, mais puisque cette notion est nouvelle (définition vue samedi), on privilégiera les exercices sur les puissances et les polynômes de matrices. On privilégiera également les systèmes à coefficients fixés (sans paramètres), à ce stade.