Compétences - Matrices

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

TOUT LE PROGRAMME DE LA SEMAINE PRÉCÉDENTE SUR LA CONTINUITE, ET :

1 Systèmes linéaires

- ☐ Savoir échelonner puis résoudre un système linéaire (Question de cours : le faire dans un cas concret à 3 ou 4 inconnues)

2 Généralités

- ☐ Notations I_n, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notation $[A]_{i,j}$ pour le coefficient de la ligne i, colonne j de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont la même taille et tous leurs coefficients égaux.
- ☐ Matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, expression en fonction du coefficient d'indice (i, j) de $E_{k,l}$. Savoir retrouver l'expression de $E_{k,l}E_{k',l'}$.
- ☐ Définition d'une combinaison linéaire de matrices. Savoir expliquer pourquoi toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une combinaison linéaire des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. (Question de cours)
- ☐ Savoir énoncer précisément à quel condition sur les tailles de deux matrices A, B peut-on parler du produit AB, et donner dans ce cas la définition du coefficient d'indice (i, j) de AB. (Question de cours : définition plus un exemple)
- ☐ Propriétés de l'addition et la multiplication de matrices : on peut retenir que tout se passe comme attendu, sauf la commutativité (on n'a pas toujours $AB = BA$), et l'intégrité ($AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$).
- ☐ Savoir énoncer et prouver la propriété de distributivité. (Question de cours)
- ☐ Transposée d'une matrice, savoir démontrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ (Question de cours)

3 Matrices carrées

- ☐ Notion de matrices qui commutent entre elles.
- ☐ Formule pour les puissances d'une matrice diagonale.
- ☐ Savoir que la matrice I_n est le neutre pour la loi multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AI_n = I_nA = A$.
- ☐ Puissances de la matrice $J = (1)_{1\leq i,j\leq n}$.
- ☐ Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices qui commutent.
- ☐ Pour P un polynôme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définition de $P(A)$.
- ☐ Définition d'une matrice inversible : Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$
  Dans ce cas on dit que A est inversible. B est unique et on la note A^{-1} : c'est l'inverse de A.
- ☐ Assertions équivalentes à l'inversibilité :
  1. Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$
  2. Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = Y$.
  3. Pour tout vecteurs colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.
  4. A peut être transformée, par des opérations élémentaires, en une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients sur la diagonale sont non nuls

  Il faut savoir prouver 1. équivaut à 2., 2. implique 3. et l'unicité de B quand l'assertion 1. est vérifiée. (Définition plus une des implications ou bien l'unicité, cela fait 4 questions de cours)
- ☐ Critère de non inversibilité : une matrice est non inversible si et seulement une de ses colonnes est combinaison linéaires des autres colonnes
- ☐ Critère de non inversibilité une matrice est non inversible si et seulement une de ses lignes est combinaison linéaires des autres lignes

Note pour les colleurs :

$\star$ La notion de matrice inverse donnera lieu à des questions de cours, mais puisque cette notion est nouvelle (définition vue samedi), on privilégiera les exercices sur les puissances et les polynômes de matrices.

$\star$ La détermination pratique de l'inverse d'une matrice n'a pas été encore vu en cours.

Preuve de la distributivité du produit matriciel

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

Notons $A(B+C) = (d_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$, $AB = (e_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ et $AC = (f_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$.

$d_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}(b_{k,j} + c_{k,j}) = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j} + \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}c_{k,j}$

$e_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$

$f_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}c_{k,j}$

Donc $d_{i,j} = e_{i,j} + f_{i,j}$

Donc $A(B+C) = AB + AC$.

Idem pour prouver $(B+C)A = BA + CA$.

Preuve ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ **:**

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

On note :

$AB = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$

${}^t(AB) = (c'_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ avec pour tout $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$, $c'_{i,j} = c_{j,i}$

${}^tB = (b'_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ avec pour tout $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]$, $b'_{i,j} = b_{j,i}$

${}^tA = (a'_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ avec pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, $a'_{i,j} = a_{j,i}$

${}^tB{}^tA = (d_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$

Soit $(j,i) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$

$c'_{i,j} = c_{j,i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{j,k}b_{k,i}$

$d_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} b'_{i,k}a'_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i}a_{j,k}$

Donc $d_{i,j} = c'_{i,j}$.

Donc ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.