Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques approfondies – informatique de la classe d'ECG
1ère année

Table des matières

Introduction

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse, ...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.

- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC est celui du cours de mathématiques complémentaires de la classe terminale. Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du cours de spécialité mathématiques de la classe de première et du cours de mathématiques complémentaires de terminale, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants.

Le programme s'organise autour de quatre points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- L'algèbre linéaire est abordée d'abord par le calcul matriciel, outil indispensable pour le calcul multidimensionnel, puis par les espaces vectoriels. La pratique de l'algèbre linéaire permet de développer chez l'étudiant des capacités d'abstraction, mais aussi de renforcer sa démarche logique indispensable en mathématiques.
- L'analyse vise à mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire. On n'insiste donc ni sur les questions trop fines ou spécialisées ni sur les exemples « pathologiques ». On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.
- Les probabilités s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en terminale.
- L'informatique est enseignée tout au long de l'année en lien direct avec le programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité, de la recherche de valeurs approchées en analyse ou d'outils de calculs en algèbre linéaire.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités permettent en particulier d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries...) et d'algèbre linéaire et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine, et le cours de mathématiques qu'ils auront choisi en classe de terminale. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités au lycée, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus. Les nombres complexes n'étant abordés que dans le cours optionnel de mathématiques expertes, ne font plus partie du programme.

L'étude des variables aléatoires discrètes infinies en première année nécessite l'introduction des séries. Dans un souci d'allègement de la première année, en continuité avec les programmes du lycée, le concept de variable aléatoire à densité ne sera présenté qu'en deuxième année. Cependant les intégrales généralisées seront présentées en analyse dès la première année.

L'algèbre linéaire est abordée, au premier semestre, par le biais du calcul : calcul matriciel, systèmes d'équations linéaires. Des rudiments de vocabulaire général sur les espaces vectoriels sont introduits lors du premier semestre. Ce choix a pour ambition de familiariser les étudiants avec le calcul multidimensionnel afin de les préparer à l'introduction de la notion abstraite d'espace vectoriel, qui sera étudiée essentiellement au second semestre.

En analyse, le premier semestre permet de consolider et approfondir des notions familières aux étudiants, comme les suites, les intégrales et les dérivées. Le second semestre généralise les notions du premier semestre en introduisant les séries et les intégrales généralisées, dans l'objectif de l'étude des probabilités (les variables aléatoires à densité ne seront abordées qu'en deuxième année).

Pour les probabilités, on se place sur les espaces probabilisés finis au premier semestre, puis plus généraux au second semestre.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus, des applications ou des exemples d'activités.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

La plupart des résultats mentionnés dans le programme seront démontrés. Pour certains marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les étudiants des techniques usuelles et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique. Le langage de référence choisi pour ce programme est Python.

Enseignement de mathématiques du premier semestre

I - Raisonnement et vocabulaire ensembliste

1 - Éléments de logique

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire des raisonnements mathématiques, mais tout exposé théorique est exclu. Les notions de ce paragraphe pourront être présentées en contexte au cours du semestre, évitant ainsi une présentation trop formelle.

Connecteurs : et, ou, non, implication, réciproque, contraposée.
Quantificateurs : $\forall$, $\exists$.

On présentera des exemples de phrases mathématiques utilisant les connecteurs et les quantificateurs, et on expliquera comment écrire leurs négations.

2 - Raisonnement par récurrence et calcul de sommes et de produits

Emploi du raisonnement par récurrence.

Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

Formules donnant : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

Les formules donnant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ seront vues en exercice. Elles ne sont pas exigibles.

Notations $\sum$, $\prod$.

Les étudiants doivent savoir employer les notations $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\displaystyle\sum_{i\in A} u_i$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^2$. $\boxed{\blacktriangleright}$

Définition de $n!$.

Formule du binôme, triangle de Pascal.

On pourra introduire les coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal

3 - Ensembles, applications

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, en vue de préparer l'étude des chapitres d'algèbre linéaire et de probabilités, mais tout exposé théorique est exclu.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Appartenance. Inclusion. Notations $\in$, $\subset$.
Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E
Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

En lien avec le programme de terminale, on montrera que le nombre $\dbinom{n}{p}$ est aussi le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire. $\boxed{\blacktriangleright}$

Formules $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
$\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$ et $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\dbinom{n-1}{p-1}$.

Complémentaire. Notation $\overline{A}$.

La notation $\overline{A}$ est à privilégier. En cas d'ambiguïté, on utilisera la notation $\complement_E A$.

Union, intersection. Notations $\bigcap$, $\bigcup$.
Distributivité. Lois de Morgan.

On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels.

Définition du produit cartésien d'ensembles.

On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Applications

Définition. Composée de deux applications.

Restriction et prolongement d'une application.	Ces deux notions ne seront introduites que dans les cours d'algèbre linéaire et d'analyse.
Applications injectives, surjectives, bijectives.	On pourra donner des exemples issus du cours d'analyse.

II - **Polynômes**

La construction des polynômes formels n'est pas au programme. On identifiera polynômes et fonctions polynomiales. Les démonstrations des résultats de ce paragraphe ne sont pas exigibles.

Ensemble $\mathbf{R}[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$. Opérations algébriques.	
Degré.	Par convention $\deg(0) = -\infty$.
Ensembles $\mathbf{R}_n[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ de degré au plus n.	
Division euclidienne.	Multiples et diviseurs.
Racines, ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation de la multiplicité par factorisation d'une puissance de $(x - a)$. Formule de Taylor pour un polynôme	Cas des polynômes de degré 2.
Exemples simples de factorisation dans $\mathbf{R}[x]$.	On énoncera le résultat général sans démonstration.

III - **Algèbre linéaire**

L'objet de ce chapitre est la mise en place de l'outil vectoriel dès le premier semestre, afin de confronter rapidement les étudiants aux notions étudiées dans le cours d'algèbre linéaire.

Dans un premier temps, on présentera la notion de matrice et l'on familiarisera les étudiants à la manipulation de ces objets avant d'en aborder les aspects vectoriels.

L'étude de ce chapitre pourra être menée en lien avec l'algorithmique en ce qui concerne le calcul matriciel. $\boxed{\blacktriangleright}$

1 - Calcul matriciel

a) Matrices rectangulaires

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{R}$.	
Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.	Addition, multiplication par un scalaire. $\boxed{\blacktriangleright}$
Produit matriciel.	On pourra faire le lien entre le produit AB et le produit de A avec les colonnes de B. $\boxed{\blacktriangleright}$
Transposée d'une matrice. Transposition d'un produit.	Notation ${}^tA$.

b) Cas des matrices carrées

Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{R}$.
Matrices triangulaires, diagonales, symétriques, antisymétriques.

Matrices inversibles, inverse d'une matrice.

On admettra que pour une matrice carrée, un inverse à gauche ou à droite est l'inverse.

Inverse d'un produit. Transposition de l'inverse.

Formule donnant l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.
Inversibilité d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire.

2 - Systèmes linéaires

Tout développement théorique est hors programme.

Définition d'un système linéaire.

Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On adoptera les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes : $L_j \leftrightarrow L_i$, $L_i \leftarrow aL_i + bL_j \quad (a \neq 0, i \neq j)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

Un système linéaire admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

Un système linéaire homogène admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions.

Écriture matricielle d'un système linéaire.

Calcul de l'inverse de la matrice A par la résolution du système $AX = Y$.

3 - Introduction aux espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Cette première approche des espaces vectoriels permet d'introduire le vocabulaire et sera accompagnée de nombreux exemples.

Il sera possible, à l'occasion d'autres chapitres en analyse ou probabilité, de rappeler la structure d'espace vectoriel des ensembles les plus courants, afin de familiariser les étudiants avec le vocabulaire et les notions fondamentales, avant une étude plus approfondie des espaces vectoriels au second semestre.

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$. *Les notions de corps, d'algèbre et de groupe sont hors programme.*

Structure d'espace vectoriel.
Sous-espaces vectoriels.

Cette étude doit être accompagnée de nombreux exemples issus de l'algèbre (espaces $\mathbf{R}^n$, espaces de polynômes, espaces de matrices), de l'analyse (espaces de suites, de fonctions). On distinguera les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Combinaisons linéaires.

On ne considèrera que des combinaisons linéaires de familles finies.
Une famille finie d'un espace vectoriel E est la donnée d'une liste finie $(x_1, ..., x_n)$ de vecteurs de E. Le cardinal de cette famille est n.

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base.	On se limitera à des familles et des bases de cardinal fini.
Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base.	Exemple de la base canonique de $\mathbf{R}^n$, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{R}_n[x]$.

IV - **Suites de nombres réels**

L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants dès le premier semestre avec des méthodes d'analyse. La construction de **R** *est hors programme et le théorème de la borne supérieure est admis.*

1 - Vocabulaire sur l'ensemble R des nombres réels

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	
Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure d'une partie non vide de **R**.	Quand il existe, le maximum de A coincide avec la borne supérieure de A.
Théorème de la borne supérieure.	Résultat admis.
Partie entière d'un réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$. La notation $E(.)$ est réservée à l'espérance mathématique.

2 - Exemples de suites réelles

Suites arithmético-géométriques.	On se ramenera au cas d'une suite géométrique.
Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 à coefficients réels. Équation caractéristique. On se limitera aux équations caractéristiques à solutions réelles.	Cette partie pourra être l'occasion d'illustrer, dans un cas concret, les notions de famille libre, génératrice et de base.

3 - Convergence des suites réelles - Théorèmes fondamentaux

On utilisera la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer le comportement des suites. ▶

Limite d'une suite, suites convergentes.	On dit que (u_n) converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux. On donnera une définition quantifiée de la limite ℓ (traduction en ε, n_0) sans en faire une utilisation systématique.
Généralisation aux suites tendant vers $\pm\infty$.	
Unicité de la limite. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement. Suites monotones, croissantes, décroissantes, suites adjacentes.	

Théorème de limite monotone.	Toute suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée) converge, la limite étant la borne supérieure (respectivement inférieure) de l'ensemble des valeurs de la suite. Une suite croissante non majorée (respectivement décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.	
Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.	
Croissances comparées.	Comparaisons des suites $(n!)$, (n^a), (q^n), $(\ln(n)^b)$.

V - **Fonctions réelles d'une variable réelle**

En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.

Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$*. Les étudiants doivent savoir étudier les situations qui s'y ramènent simplement.*

L'analyse reposant largement sur les inégalités, on les pratiquera régulièrement à l'occasion d'exercices.

Aucune démonstration n'est exigible des étudiants.

1 - Limite et continuité d'une fonction d'une variable en un point

Définition de la limite et de la continuité d'une fonction d'une variable en un point. Unicité de la limite. Limites à droite et à gauche. Extension au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$. Extension de la notion de limite en $\pm\infty$ et aux cas des limites infinies.	On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur I, x_0 étant un élément de I ou une extrémité de I, et ℓ un élément de $\mathbf{R}$, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $\lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon$; dans ce cas, lorsque x_0 appartient à I, f est continue en x_0, sinon f se prolonge en une fonction continue en x_0.
Opérations algébriques sur les limites. Compatibilité avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement.	
Prolongement par continuité en un point.	
Si f admet une limite ℓ en x_0 et si (u_n) est une suite réelle définie sur I et tendant vers x_0, alors $(f(u_n))$ tend vers ℓ. Limite d'une fonction composée.	La caractérisation séquentielle de la limite n'est pas au programme.

2 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

On insistera sur les représentations graphiques. On s'appuiera sur les fonctions de référence pour illustrer les notions de cette section. Les fonctions exponentielle, puissance et logarithme ont été vues *en terminale. Les fonctions trigonométriques ne sont pas supposées connues. L'existence des fonctions cosinus et sinus n'est pas un enjeu du programme. On interprétera géométriquement leurs propriétés à l'aide du cercle trigonométrique.*

Fonctions de référence	exp, ln, $x \mapsto x^\alpha$, cos, sin, tan, arctan, valeur absolue et partie entière.
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.	Aucune autre formule n'est exigible. Les formules produit seront vues en exercice et mises en application.
Croissances comparées	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^a \ln(x)^b$, $\lim\limits_{x\to 0} x^a \lvert\ln(x)\rvert^b$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \lvert x\rvert^a \mathrm{e}^{bx}$.
Fonctions paires, impaires, périodiques.	
Fonctions majorées, minorées, bornées, monotones.	
Théorème de limite monotone.	Toute fonction monotone sur $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$. Comportement en a et b.
Fonctions continues sur un intervalle, opérations algébriques, composition. Théorème des valeurs intermédiaires.	
L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).	Notations $\max\limits_{[a,b]} f$ et $\min\limits_{[a,b]} f$.
Théorème de la bijection.	Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa bijection réciproque est elle-même continue et a le même sens de variation. On utilisera ce résultat pour l'étude des équations du type $f(x) = k$. En liaison avec l'algorithmique, méthode de dichotomie. $\boxed{\blacktriangleright}$
Représentation graphique de la fonction réciproque.	

3 - Dérivation

Dérivées à gauche et à droite. Dérivée en un point. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit, dérivée d'une composée. Exemples.	Interprétation graphique. $\boxed{\blacktriangleright}$
Fonctions dérivables sur un intervalle, fonction dérivée. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Dérivation des fonctions réciproques.	Notation f'.
Dérivée d'un polynôme et des fonctions de référence.	

Théorème de Rolle.	
Égalité et inégalités des accroissements finis.	Si $\lvert f'\rvert \leqslant k$ sur un intervalle I, alors : $\forall (a,b) \in I^2, \quad \lvert f(b) - f(a)\rvert \leqslant k\lvert b-a\rvert.$ Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu. ▶
Caractérisation des fonctions constantes et monotones par l'étude de la dérivée.	Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Théorème du prolongement de la dérivée.	Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$, continue en a, et si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$, alors f est $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

4 - Intégration sur un segment

La construction de l'intégrale de Riemann est hors programme.

Définition de l'intégrale d'une fonction positive sur un segment comme aire sous la courbe. On généralise à une fonction de signe quelconque sans soulever de difficulté théorique.	Illustration par la méthode des rectangles. ▶
Sommes de Riemann	La convergence des sommes de Riemann ne sera démontrée que dans le cas d'une fonction continue de classe $\mathcal{C}^1$.
Linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance.	
Cas d'une fonction continue, positive sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle.	Si f est continue sur $[a,b]$ et $a \leqslant b$, $\left\lvert \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(t)\rvert \mathrm{d}t.$
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. $x \longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est une primitive de f.	Résultat admis. Pour toute primitive F de f : $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a),$ ▶ On pourra vérifier ce résultat sur des exemples en informatique.
Intégration par parties.	
Changement de variable.	Les changements de variable non affines doivent être indiqués aux candidats. On se restreindra à des changements de variables C^1 strictement monotones.

VI - Probabilités sur un ensemble fini

L'objectif de cette première approche est de mettre en place un cadre simplifié mais formalisé dans lequel on puisse mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique majeure.

Dans la continuité du programme de terminale, l'étude préalable du cas fini permettra de consolider les acquis et de mettre en place, dans des situations simples, les concepts probabilistes de base, en ne *faisant appel qu'aux opérations logiques et arithmétiques élémentaires. C'est pourquoi, pour le premier semestre, on se restreindra à un univers Ω fini, muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Le terme tribu ne sera pas employé.*

On évitera pour cette première approche un usage avancé de la combinatoire, et l'on s'attachera à utiliser le vocabulaire général des probabilités.

1 - Généralités

a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements

Expérience aléatoire. Univers Ω des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles (ou « disjoints »).	On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples. On fera le lien entre ces opérations et les connecteurs logiques.
Système complet d'événements fini.	Une famille $(A_i)_{i\in I}$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$, est un système complet si elle vérifie les conditions deux suivantes : • $\forall i, j \in I$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$ • $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

b) Probabilité

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.	Une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une application additive P à valeurs dans $[0,1]$ et vérifiant $P(\Omega) = 1$. Cas de l'équiprobabilité.
Formule de Poincaré ou du crible pour deux et trois événements.	

c) Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.	Notation P_A. P_A est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
Formule des probabilités composées.	• Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. • Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors : $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$.
Formule des probabilités totales	Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements fini, alors pour tout événement B : $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$. Si de plus, pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $P(A_i) \neq 0$, on a : $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$.
Formule de Bayes.	On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

d) Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.	Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$. On remarquera que la notion d'indépendance est relative à la probabilité.
Indépendance mutuelle de n événements. Si n événements A_1, ..., A_n sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.	

2 - Variables aléatoires réelles finies

On introduit dans cette section la notion de variable aléatoire réelle définie sur un univers fini. Ces variables aléatoires sont alors à valeurs dans un ensemble fini, ce qui simplifie la démonstration des formules.

Une variable aléatoire réelle est une application de Ω dans $\mathbf{R}$.	On adoptera les notations habituelles telles que $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.
Système complet associé à une variable aléatoire.	
Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle.	La loi de X est la donnée de $X(\Omega)$ et des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur $X(\Omega)$. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	On se limitera à des cas simples, tels que $g(x) = ax + b$, $g(x) = x^2$, ...
Espérance d'une variable aléatoire.	$E(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.
Linéarité de l'espérance. Croissance de l'espérance	$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
Théorème de transfert.	$E(g(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. Théorème admis.
Variance et écart-type d'une variable aléatoire. Cas particulier où $V(X) = 0$.	Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$.
Calcul de la variance. $V(aX + b) = a^2V(X)$.	Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

3 - Lois usuelles ▶

Variable aléatoire certaine.	
Loi de Bernoulli, espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. La variable indicatrice $\mathbf{1}_A$ de l'événement A suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
Loi binomiale. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On pourra faire le lien avec la formule du binôme de Newton et les propriétés des coefficients binomiaux.

Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, espérance, variance.	Application à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, où $(a,b)\in\mathbf{Z}^2$. Notation $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

Enseignement de mathématiques du second semestre

I - Algèbre linéaire

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir et compléter les notions vues au premier semestre.

1 - Espaces vectoriels de dimension finie

Dans cette section, aucune démonstration n'est exigible.

Espaces admettant une famille génératrice finie. Existence de bases. Si L est libre et si G est génératrice, le cardinal de L est inférieur ou égal au cardinal de G.	
Dimension d'un espace vectoriel.	Notation $\dim(E)$.
Caractérisation des bases.	Dans un espace vectoriel de dimension n, une famille libre ou génératrice de cardinal n est une base.
Rang d'une famille finie de vecteurs. Théorème de la base incomplète.	
Dimension d'un sous-espace vectoriel.	Si F est un sous-espace vectoriel de E et si $\dim(F)=\dim(E)$, alors $F=E$.

2 - Compléments sur les espaces vectoriels

Dans cette section, aucune démonstration n'est exigible.

Somme de deux sous-espaces vectoriels.	
Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.	Tout vecteur de la somme se décompose de manière unique.
Existence d'un supplémentaire en dimension finie.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie. Si F et G sont supplémentaires, $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$. Caractérisation de $E=F\oplus G$ par la dimension et l'intersection de F et G.	Dimension d'un supplémentaire.
Concaténation de bases de deux sous-espaces vectoriels.	Caractérisation de sommes directes par concaténation de bases.

3 - Applications linéaires

a) Cas général

Définition d'une application linéaire de E dans F. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.	On s'appuiera sur des exemples concrets, par exemple l'application $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X \longmapsto MX$, dont on soulignera les propriétés.
Composée de deux applications linéaires.	
Isomorphismes.	Un espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Endomorphismes, espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E.	Puissances d'un endomorphisme.
Noyau et image d'une application linéaire.	
Projecteurs associés à deux espaces supplémentaires.	Caractérisation des projecteurs par la relation $p^2 = p$.

b) Cas de la dimension finie

Rang d'une application linéaire.	Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E alors la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ engendre $\mathrm{Im}(f)$. Lien entre recherche de l'image et résolution de système.
Formule du rang.	Si E et F sont des espaces vectoriels, E étant de dimension finie, et une application linéaire u de E dans F, $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\ u) + \dim(\mathrm{Im}\ u)$. Application à la caractérisation des isomorphismes. Application : le noyau d'une forme linéaire non-nulle est un hyperplan.

c) Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire dans des bases.	Si $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases respectives de E et F, notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$. Matrice de $f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X \longmapsto MX$ relative aux bases canoniques. Matrice d'une forme linéaire.
Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	Matrices colonnes des coordonnées d'un vecteur dans deux bases différentes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Formule $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$
Lien du produit matriciel avec la composition des applications linéaires.	Si $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont des bases respectives de E, F et G, f une application linéaire de E dans F, g une application linéaire de F dans G, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$.
Rang d'une matrice.	Pour toutes bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ est égal au rang de f.

Une matrice et sa transposée ont même rang.	Résultat admis.

d) Cas des endomorphismes et des matrices carrées

Matrice d'un endomorphisme f de E dans la base $\mathcal{B}$.	Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Formule du binôme pour deux endomorphismes ou deux matrices carrées qui commutent.	
Lien entre les isomorphismes de E et les matrices inversibles.	On pourra démontrer que pour le produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'inverse à gauche est également un inverse à droite.
Polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice carrée. Polynôme annulateur.	Exemples de calcul d'isomorphismes réciproques, d'inverses de matrices et de puissances k-ème d'une matrice par utilisation d'un polynôme annulateur. Toute théorie générale sur les polynômes annulateurs est exclue.

II - **Compléments d'analyse**

1 - Étude asymptotique des suites

Suite négligeable.	Notation $u_n = o(v_n)$. On présentera à nouveau les croissances comparées vues au premier semestre.
Suites équivalentes.	Notation $u_n \sim v_n$. $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$.
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.	

2 - Comparaison des fonctions d'une variable au voisinage d'un point

Fonction négligeable au voisinage de x_0. Notation $f = o(g)$.	On revient sur la croissance comparée $\lim\limits_{x \to 0} x^a \lvert\ln(x)\rvert^b$
Fonctions équivalentes au voisinage de x_0.	Notation $f \underset{x_0}{\sim} g$. $f \underset{x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow f = g + o(g)$.
Extension au cas $x_0 = \pm\infty$.	On revient sur les croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a \ln(x)^b$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \lvert x\rvert^a \mathrm{e}^{bx}$
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.	

3 - Séries numériques

Convergence d'une série, somme et reste d'une série convergente.	On pourra utiliser des représentations graphiques pour conjecturer la nature d'une série. ▶

Combinaison linéaire de séries convergentes.	
Convergence des séries à termes positifs.	
Convergence des séries à termes positifs dans les cas $u_n \leqslant v_n$ et $u_n \sim v_n$. Définition de la convergence absolue.	Résultat analogue pour les séries à termes négatifs. Résultats admis.
La convergence absolue implique la convergence.	On remarquera que toute série absolument convergente est la différence de deux séries à termes positifs convergentes.
Convergence des séries dans le cas $u_n = o(v_n)$ où (v_n) est une série convergente à termes positifs.	Résultat admis.
Convergence des séries de Riemann.	
Convergence et formules de sommation des séries géométriques et de leurs deux premières dérivées.	
Série exponentielle.	$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Ce résultat pourra être admis ou démontré ultérieurement à l'aide de la formule de Taylor. $\boxed{\blacktriangleright}$
Exemples d'étude de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n).	

4 - Intégrales sur un intervalle quelconque

On évitera toute technicité dans ce chapitre dont l'objectif est d'introduire les outils utiles à l'étude des variables aléatoires à densité.

Intégration sur un intervalle semi-ouvert. Convergence de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$.	On dira que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si $\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. On pose alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\mapsto b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.
Règles de calcul sur les intégrales convergentes, linéarité, relation de Chasles, positivité, inégalités. Cas d'une fonction continue, positive sur $[a, b[$ et d'intégrale nulle.	
Cas des fonctions positives.	L'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.
Théorèmes de convergence pour f et g positives au voisinage de b, dans les cas où $f \leqslant g$ et $f \underset{b}{\sim} g$.	Théorème analogue pour des fonctions f et g négatives au voisinage de b. Théorèmes admis.
Définition de la convergence absolue.	

La convergence absolue implique la convergence.

On remarquera que toute fonction continue est la différence de deux fonctions continues positives.

Théorèmes de convergence dans le cas $f = o(g)$ avec g positive au voisinage de b.

Théorème admis.

Extension des notions précédentes aux intégrales sur un intervalle quelconque.

Brève extension aux fonctions définies et continues sur $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

Convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

Pratique de l'intégration par parties pour les intégrales sur un intervalle quelconque.

L'intégration par parties sera pratiquée pour des intégrales sur un segment, on effectuera ensuite un passage à la limite.

Changement de variables.

Si f est continue sur $]a, b[$, si φ est une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$, croissante et de classe C^1, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence sont égales.
Énoncé analogue dans le cas où φ est décroissante.
Les changements de variables non affines devront être indiqués aux candidats et ne pas présenter de difficultés techniques.

5 - Dérivées successives

Fonction p fois dérivable en un point.

Notation $f^{(p)}$.

Fonctions de classe C^p, de classe C^∞ sur un intervalle. Opérations algébriques, formule de Leibniz. Théorème de composition.

La dérivée $(n+1)$-ème d'un polynôme de degré au plus n est nulle.

6 - Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.
Inégalité de Taylor-Lagrange.

Ces formules seront données à l'ordre n pour une fonction de classe C^∞.

7 - Développements limités

L'étude des développements limités ne constitue pas une fin en soi et l'on se gardera de tout excès de technicité dans ce domaine. La composition des développements limités n'est pas au programme. On se limitera, en pratique, à des développements limités au voisinage de 0.

Définition d'un développement limité.	On fera le lien entre un développement limité à l'ordre 1 et la valeur de la dérivée. On pourra introduire et manipuler la notation $x^n\varepsilon(x)$ avant l'utilisation éventuelle de la notation $o(x^n)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe C^∞.	Résultat admis. Unicité du développement limité.
Application de la formule de Taylor-Young au développement limité de fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, sinus et cosinus).	
Somme et produit de développements limités.	
Allure locale du graphe d'une fonction admettant un développement limité du type : $f(x) = a_0 + a_1x + a_kx^k + x^k\epsilon(x), k \geq 2$ et $a_k \neq 0$	La forme du graphe au voisinage d'un point dépend principalement du premier terme non linéaire du développement limité. Exemples avec $k = 2$ et $k = 3$

8 - Extremum

Pour préparer l'introduction des notions de topologie du programme de deuxième année, on insistera sur la différence entre la recherche d'extremum sur un segment et la recherche d'extremum sur un intervalle ouvert. On n'étudiera aucun exemple de fonction $\mathcal{C}^1$ sans être $\mathcal{C}^2$.

Toute fonction continue sur un segment admet des extrema globaux sur ce segment.	
Dans le cas d'une fonction de classe C^1 : condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un intervalle ouvert.	On pourra montrer que le résultat tombe en défaut lorsque l'intervalle de définition n'est pas ouvert.
Définition d'un point critique.	
Condition suffisante d'existence d'un extremum local en un point critique pour une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert.	Ce résultat sera démontré grâce au développement limité à l'ordre 2.

9 - Fonctions convexes

Tous les résultats de cette section seront admis. On n'étudiera aucun exemple de fonction convexe $\mathcal{C}^1$ sans être $\mathcal{C}^2$.

Définition des fonctions convexes, fonctions concaves.	Une fonction est convexe sur un intervalle I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2$ tels que $t_1+t_2 = 1$, $$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1f(x_1) + t_2f(x_2).$$ Interprétation géométrique. $\boxed{\blacktriangleright}$
Généralisation de l'inégalité de convexité.	
Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1.	Les étudiants devront savoir que si f est de classe C^1, alors f est convexe si et seulement si l'une des deux propositions est vérifiée : • f' est croissante ; • C_f est au-dessus des tangentes.
Caractérisation des fonctions convexes et concaves de classe C^2.	

Condition suffisante de minimum global en un point critique d'une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert
Point d'inflexion.

10 - Graphes de fonctions

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions. Allure locale du graphe (tangentes). Convexité. Asymptotes éventuelles.

On pourra étudier la position d'une courbe par rapport à une asymptote (éventuellement oblique). Les branches paraboliques ne sont pas au programme.
Exemples de points d'inflexion. ▶

III - **Probabilités sur un ensemble quelconque**

Dans ce second temps de l'étude des probabilités, le vocabulaire général est adopté et complété (en particulier le vocabulaire « espace probabilisé » et la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), mais aucune difficulté théorique sur l'ensemble des événements ne sera soulevée dans ce cadre. On n'emploiera pas le terme tribu.

1 - Espace probabilisé

Univers Ω des issues d'une expérience et ensemble des événements $\mathcal{A}$.

L'ensemble des événements contient Ω, est stable par union et intersection dénombrable, par passage au complémentaire.
Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.

Une probabilité est une application P définie sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des évenements à valeurs dans $[0, 1]$, σ-additive telle que $P(\Omega) = 1$.

Notion d'espace probabilisé.

Notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Théorème de la limite monotone.

• Soit (A_n) une suite d'événements, croissante pour l'inclusion. On a :
$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$
• Soit (A_n) une suite d'événements, décroissante pour l'inclusion. On a :
$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Conséquences du théorème de la limite monotone.

Pour toute suite (B_k) d'événements,
• $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)$.
• $P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} B_k\right)$.
Les démonstrations de ces formules ne sont pas exigibles.

Propriétés vraies presque sûrement. Événement négligeable, événement presque sûr.	On pourra donner comme exemple d'événement négligeable la réalisation d'une suite infinie de PILE lors d'un jeu de PILE ou FACE.
Notion de probabilité conditionnelle conditionnée par un évènement de probabilité non nulle.	Si A vérifie $P(A) \neq 0$, alors $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.
Formule des probabilités totales.	Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement B on a : $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B).$$
Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.	

2 - Variables aléatoires réelles discrètes

On commencera cette section en expliquant comment les résultats vus précédemment se prolongent dans le cadre général. On ne soulèvera pas de difficulté théorique liée à l'ordre (convergence commutative d'une série absolument convergente) ou à la dénombrabilité.

Définition d'une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.	Une fonction $X : \Omega \to \mathbf{R}$ est une variable aléatoire discrète lorsque : — $X(\Omega) = \{u_i\}_{i\in I}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$; — pour tout $i \in I, [X = u_i]$ est un événement.
Loi d'une variable aléatoire discrète.	La loi de X est la donnée de l'ensemble $X(\Omega)$ et des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	
Indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes.	Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes (mutuellement) lorsque pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ on a : $$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$
Espérance d'une variable aléatoire.	Quand $X(\Omega)$ est infini, X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente. Cette valeur ne dépend pas de l'indexation de $X(\Omega)$ (admis).
Linéarité de l'espérance. Croissance de l'espérance.	$E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$. Résultat admis.

Existence d'une espérance par domination.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes vérifiant $0 \leqslant \|X\| \leqslant Y$, et si Y admet une espérance, alors X admet également une espérance. Dans ce cas, $\|E(X)\| \leqslant E(Y)$. Résultat admis.
Théorème de transfert.	Quand $X(\Omega)$ est infini, $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X=x)$ est absolument convergente, et alors $$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X=x).$$ Cette valeur ne dépend pas de l'indexation de $X(\Omega)$. Théorème admis.
Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète.	Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$.
Calcul de la variance. $V(aX+b) = a^2V(X)$.	Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.
Cas particulier où $V(X) = 0$.	
Introduction à la notion de fonction de répartition.	F_X est définie sur $\mathbf{R}$ par : $F_X(x) = P(X \leq x)$.

3 - Lois de variables aléatoires discrètes usuelles

L'étude des variables aléatoires et notamment celles associées aux lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme. On revisitera les lois usuelles du premier semestre. $\boxed{\blacktriangleright}$

Retour sur les variables aléatoires certaines.	Fonction de répartition.
Retour sur les variables de Bernoulli.	Fonction de répartition.
Loi géométrique (rang d'apparition d'un premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Définition, espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. $\boxed{\blacktriangleright}$ Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, pour tout nombre entier naturel non nul k, $$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$
Loi de Poisson : définition, espérance, variance	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

4 - Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Caractérisation de la loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes.	La loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée des valeurs $P([X=x] \cap [Y=y])$ pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Retour sur l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.	Deux variables aléatoires X et Y discrètes sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x])P([Y = y])$.
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	• Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. • Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Loi d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y).	On se limitera à des cas simples tels que $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$, $X + Y$.
Espérance de $Z = g(X, Y)$ et théorème de transfert.	Sous réserve de convergence absolue : $$E(Z) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x, y)P([X = x] \cap [Y = y]).$$ Résultat admis, qui peut a posteriori justifier la linéarité de l'espérance.
Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. On pourra admettre ce résultat.

5 - Convergences et approximations

Il s'agit dans cette partie de familiariser les étudiants avec ces notions, sans définir la convergence en probabilité ni la convergence en loi.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour les variables aléatoires discrètes.	Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout $\lambda > 0$: $$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}.$$ Pour toute variable aléatoire X admettant espérance et variance, pour tout $\varepsilon > 0$: $$P(\lvert X - E(X)\rvert \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Loi faible des grands nombres.	Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi qui admettent une espérance m et une variance, et si $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left\lvert\overline{X_n} - m\right\rvert \geq \varepsilon\right) = 0.$$ ▶ La loi faible des grands nombres appliquée à des variables de Bernoulli permet de conforter l'approche intuitive de probabilité d'un événement
Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson	Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ alors pour tout k entier naturel : $$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$ où X suit une loi de Poisson de paramètre λ. ▶

Enseignement annuel d'informatique et algorithmique

L'objectif est d'assoir les connaissances des étudiants en algorithmique et de les entraîner à l'utilisation de l'informatique en mathématiques au travers de thèmes empruntés au programme pour comprendre, illustrer et éclairer les notions introduites. Dès qu'un calcul numérique est envisagé, dès qu'un problème incite à tester expérimentalement un résultat, dès qu'une situation aléatoire peut être modélisée avec des outils informatiques, le recours à des algorithmes et des logiciels devra devenir naturel.

Les séances de travaux pratiques doivent se faire le plus souvent possible sur ordinateur. Les étudiants, au cours de leurs études ultérieures puis de leur parcours professionnel, seront amenés à utiliser des outils informatiques divers choisis pour leurs fonctionnalités, et seule une pratique régulière de ces outils informatiques peut leur permettre d'en acquérir la maîtrise. De plus, en adoptant cette démarche exploratoire permise par le dialogue interactif avec la machine, cette pratique peut s'avérer bénéfique pour les apprentissages et faciliter la compréhension de concepts plus abstraits.

Le langage retenu pour la programmation dans le programme des classes économiques et commerciales, option mathématiques approfondies , est Python.

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi seules les fonctions et commandes introduites en figurant dans la sous-partie « Commandes exigibles » sont exigibles. Néanmoins, se contenter de ces seules commandes, en ignorant les nombreuses possibilités et commodités du langage, se révélerait rapidement contraignant et limitatif. De nouvelles commandes Python peuvent donc être introduites, mais cela devra se faire avec parcimonie, l'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique des connaissances mathématiques. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives des étudiants grâce à l'utilisation de l'aide de Python, et à l'usage d'opérations de« copier-coller » qui permettent de prendre en main rapidement des fonctions nouvelles et évitent d'avoir à connaître par cœur la syntaxe de commandes complexes.

Seules les notions de Python indiquées dans le programme sont exigibles. La syntaxe précise des commandes devra être rappelée.

1 - Programmation d'algorithmes et de fonctions

`if ...:`
`    ...`
Emploi de `else, elif`
	Structures conditionnelles.

`for k in range(a,b):`
`for k in T:`
`while ...:`
	`T` peut être une matrice, un vecteur, une chaîne de caractères. Les commandes `break` et `continue` ne sont pas exigibles.

`def f(x,y):`
`    ...`
`    return ...`
	Définition d'une fonction.

2 - Commandes exigibles

Il s'agit de la liste des commandes utiles pour les travaux pratiques des deux années de formation. Il n'y a pas lieu d'introduire en première année les commandes qui relèvent de notions de seconde année.

a) Disponibles de base dans Python

Affectation : `nom = expression`	L'expression peut être du type numérique, booléen, matriciel (ndarray) ou chaîne de caractères.
# permet d'insérer un commentaire	Les étudiants doivent savoir faire un usage judicieux des commentaires.
`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison, test.
`True` `False` `and` `or` `not`	Logique.
`from ... import *, import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

b) Dans la librairie `numpy`

Exemple d'importation : `import numpy as np`

`np.array, np.zeros, np.ones, np.eye,` `np.linspace, np.arange`	Création de vecteurs et de matrices. Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice.
`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base : coefficient par coefficient.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison de deux matrices (`M == N`), comparaison d'une matrice et d'un nombre (`M>=1`).
`a,b = np.shape(M)`	Taille de la matrice `M`.
`np.dot, np.transpose`	Syntaxes exigibles : `np.transpose(M)`, `np.dot(M1,M2)`. L'usage de méthode comme `M.transpose()`, `M1.dot(M2)` est non-exigible.
`np.sum, np.min, np.max, np.mean,` `np.cumsum, np.median, np.var, np.std`	Ces opérations peuvent s'appliquer sur une matrice entière ou bien pour chaque colonne (ou chaque ligne). Exemple : `mean(M)`, `mean(M,0)`, `mean(M,1)`
`np.exp, np.log, np.sin, np.cos,` `np.sqrt, np.abs, np.floor`	Ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou vectoriellement (à des matrices ou vecteurs) élément par élément. On pourra utiliser la commande `f = np.vectorize(f)` mais elle n'est pas exigible.
`np.e, np.pi`	

c) Dans la librairie `numpy.linalg`

Exemple d'importation : `import numpy.linalg as al`

`al.inv, al.rank, al.matrix_power,`
`al.solve, al.eig`

d) Dans la librairie `numpy.random`

Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`

`rd.random, rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson, rd.exponential, rd.normal, rd.gamma`	On utilisera ces fonctions pour générer un nombre aléatoire ou bien un vecteur ou une matrice à coefficients aléatoires. Exemple : `rd.binomial(10,0.2)`, `rd.binomial(10,0.2,100)`, `rd.binomial(10,0.2,[100,10])`

e) Dans la librairie `scipy.special`

Exemple d'importation : `import scipy.special as sp`

`sp.ndtr`	Fonction Φ

f) Dans la librairie `matplotlib.pyplot`

Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot, plt.show`	Représentations graphiques de fonctions, de suites. On pourra utiliser les commandes `xlim, ylim, axis, grid, legend` mais elles ne sont pas exigibles.
`plt.hist`	La maîtrise des options de cette fonction n'est pas exigible.
`plt.contour`	Tracés de lignes de niveau en lien avec `np.meshgrid`. La maîtrise de cette fonction n'est pas exigible.
`plt.quiver`	Tracés de gradients en lien avec `np.meshgrid`. La maîtrise de cette fonction n'est pas exigible.

g) Utilisation de la fonction `Axes3D`

Exemple d'importation :

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
ax = Axes3D(plt.figure())
```

`ax.plot_surface`	Représentation de surfaces en lien avec `np.meshgrid`. La maîtrise de cette fonction n'est pas exigible.

3 - Liste de savoir-faire exigibles en première année

Représentation graphique d'une fonction.	
Calcul des termes et représentation graphique d'une suite.	Représentation des points (n, u_n). Pour une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, représentation des termes de la suite à partir du graphe de f.
Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite ou de la somme d'une série.	On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique. La détermination du rang d'arrêt du calcul résultera directement de l'étude mathématique ou d'un algorithme qui en découle.

Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.	On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).
Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.	Pour des fonctions f à primitive F connue, on pourra vérifier expérimentalement le lien entre primitive et intégrale, en comparant $F(b)-F(a)$ avec une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Utilisation de la fonction `rd.random` pour simuler des expériences aléatoires.	On pourra simuler ainsi des lois binomiale et géométrique.
Simulation d'échantillons de lois usuelles.	On pourra utiliser les fonctions `rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson`
Série statistique associée à un échantillon.	Fréquences, fréquences cumulées, histogramme. Moyenne, médiane. Variance et écart-type empiriques. Sur les loi usuelles, on pourra faire un lien entre fréquences et loi, fréquences cumulées et fonction de répartition, moyenne et espérance, variance empirique et variance. On pourra comparer expérimentalement les lois $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ et $\mathcal{P}(\lambda)$.
Approche expérimentale de la loi de Gauss.	On pourra superposer la courbe de $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ et l'histogramme d'un échantillon de $\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
Calcul approché d'une probabilité.	Approche intuitive de l'estimation : si $P(A)$ est difficile à calculer, on peut simuler N fois l'expérience et assimiler $P(A)$ à la fréquence de réalisation de A.
Résolution de systèmes $MX = B$.	On pourra programmer l'algorithme du pivot de Gauss sur un exemple. En pratique on utilisera plutôt la fonction `al.solve`.