Programme de colle 12

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

Espaces vectoriels

- ☐ Avoir compris qu'un espace vectoriel est un ensemble dont on peut additionner les éléments et dont on peut multiplier les éléments par des réels (scalaires) : stabilité par combinaison linéaire.
- ☐ Savoir appliquer les règles de calculs dans les espaces vectoriels.
- ☐ Connaître les espaces vectoriels classiques et les opérations associées : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, suites réelles, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- ☐ Savoir montrer qu'un vecteur est (ou n'est pas) combinaison linéaire d'autres vecteurs.
  Savoir le faire sur des exemples concrets simples (de votre invention) dans chacun des espaces vectoriels de référence.

Notion de sous-espace vectoriel

- ☐ Définition d'un sous-espace vectoriel et caractérisation : 3 points à vérifier.
- ☐ Notion de sous-espaces vectoriels triviaux.
- ☐ Exemples classiques : $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{C}^n(D,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(D,\mathbb{R})$, ensemble des matrices symétriques, ensemble des matrices diagonales.
- ☐ Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? De $\mathbb{R}^3$?
- ☐ L'intersection de 2 sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E. (Démonstration exigible)
  ⚠Ce n'est pas le cas de l'union $F \cup G$ (sauf si l'un est inclus dans l'autre). Donner un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$.

Sous-espace vectoriel engendré

- ☐ Définition avec des mots (ensemble des vecteurs qui sont combinaisons linéaires de la famille) et définition précise de **l'ensemble** $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$.
- ☐ Pour $u_1, \ldots, u_p \in E$, $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E. (Démonstration exigible)
- ☐ Soit F un sous-espace vectoriel de E et $u_1, \ldots, u_p \in E$. $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p) \subset F$ équivaut à $u_1, \cdots, u_p \in F$ (Démonstration exigible)
- ☐ Penser, pour montrer par exemple que $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p) = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_q)$, à utiliser la propriété précédente pour chaque inclusion.
- ☐ Deux idées pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E :
  - ⋆ Ou bien vérifier les trois points de la caractérisation
  - ⋆ Ou bien déterminer une famille $(u_1, , \cdots, u_p)$ telle que $F = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$.

Familles génératrices

- ☐ Définition précise de "$(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de F" (⚠toujours préciser de quel espace vectoriel), et la version "avec des mots" ("L'ensemble des combinaisons linéaires de $(u_1, \ldots, u_p)$ est égal à F", ou bien, "$u_1, \ldots, u_p \in F$ et tout vecteur de F est une combinaison linéaire des vecteurs u_1,...,u_p"). (Question de cours)
  ⚠Dans la deuxième formulation, "$u_1, \ldots, u_p \in F$" entraîne $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p) \subset F$, et "tout vecteur de F est une combinaison linéaire des vecteurs u_1,...,u_p" entraîne $F \subset \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$, ce sont ces deux conditions qui garantissent $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ (ce qui est la première formulation).
- ☐ Connaître les modifications possibles sur la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ ne modifiant pas $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$
- ☐ Exemples classiques de familles génératrices pour $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$.
- ☐ Il existe des espaces vectoriels qui n'admettent pas de famille génératrice (et donc pas de base), en connaître. (On rappelle qu'en EC on ne considère que des familles finies de vecteurs).

Familles libres et liées

- ☐ Définition précise d'une famille libre, et la version "avec des mots" ("il n'y a pas de combinaison linéaire nulle non triviale", ou bien, "aucun vecteur ne s'exprime comme combinaison linéaire des autres", avoir compris pourquoi les deux sont équivalents) (Question de cours)

- ☐ Toute famille contenant le vecteur nul est liée (pourquoi ?). Toute famille d'un seul vecteur est libre si et seulement ci ce vecteur est non nul.
- ☐ Toute famille de deux vecteurs non colinéaires est libre (⚠ne fonctionne que pour des familles de deux vecteurs).
- ☐ Intérêt d'une famille libre : "identification coefficients à coefficients" à savoir expliquer et montrer. (Démonstration exigible)
- ☐ Modifications d'une famille $(u_1, \cdots, u_p)$ conservant son caractère liée ou libre (ajouter ou enlever des vecteurs).
- ☐ Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés est libre.

Bases d'un espace vectoriel

- ☐ Définition d'une base d'un espace vectoriel (définition précise et savoir expliquer "avec des mots"). (Question de cours)
- ☐ Savoir montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E, d'une façon ou d'une autre (avoir compris pourquoi c'est équivalent de démontrer l'un ou l'autre) :
  - ⋆ Montrer que $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de E.
  - ⋆ Vérifier que tous les vecteurs $\mathcal{B}$ appartiennent à E puis montrer que tout élément de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ (les coefficients sont alors appelés les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de ce vecteur).
- ☐ Savoir trouver une base de E en partant d'une famille génératrice de E et en enlevant des vecteurs de manière à qu'elle reste génératrice mais soit aussi libre.
- ☐ Connaître les exemples classiques de bases dans $\mathbb{R}^n$ (base canonique), $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (base canonique) et $\mathbb{R}_n[X]$ (base canonique et base de "Taylor"), bien comprendre qu'à chaque fois il s'agit d'une base mais il y en a beaucoup d'autres (un espace vectoriel n'a pas qu'une base).

Dénombrement

L'enjeu de ce chapitre est de maîtriser les techniques courantes pour compter le nombre de listes, d'arrangements ou de combinaisons dans des situations "concrètes".

- ☐ Cas de l'union disjointe d'un nombre fini d'ensembles : avoir compris que dans ce cas le cardinal de l'union est la somme des cardinaux.
- ☐ $\text{card}(A) + \text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E)$
- ☐ Cardinal de l'union de deux ensembles finis non nécessairement disjoints. (Question de cours)
- ☐ Si E, F sont deux ensembles finis et qu'il existe une bijection de E dans F, alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.
- ☐ Expliquer le principe des tiroirs. (Question de cours)
- ☐ Comprendre le principe multiplicatif, et qu'il s'agit de représenter les différentes possibilités comme les extrémités d'un arbre...
- ☐ Définition de $E_1 \times \cdots \times E_p$ (ses éléments sont des p-listes), et si $E_1, \ldots, E_p$ sont finis, cardinal de $E_1 \times \cdots \times E_p$ (grâce au principe multiplicatif). (Question de cours)
- ☐ Notation E^p. Les p-listes de E sans répétition sont appelées les $p-$arrangements de E.
- ☐ Nombre de $p-$arrangements de E. (Question de cours)
- ☐ Cas particulier des permutations de E et nombre de permutations de E.
- ☐ Les parties à p éléments de E sont appelées les $p-$combinaisons de E. Attention une $p-$combinaison de E est donc un ensemble à p éléments, les éléments n'ont pas d'ordre.
- ☐ Par définition, si E a n éléments, le nombre de $p-$combinaisons de E est $\binom{n}{p}$.
- ☐ Nombre de $p-$arrangements de E en fonction du nombre de $p-$combinaisons, savoir retrouver ainsi l'expression de $\binom{n}{p}$. (Question de cours)
- ☐ Avoir compris qu'il y a $\binom{3}{5}$ 5-listes de $\{0, 1\}$ contenant exactement trois 1, car il y a (par définition) $\binom{3}{5}$ possibilités pour l'ensemble des trois positions des 1.
- ☐ Nombre de parties d'un ensemble E.