Programme de colle 14

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

Dénombrement

L'enjeu de ce chapitre est de maîtriser les techniques courantes pour compter le nombre de listes, d'arrangements ou de combinaisons dans des situations "concrètes".

- ☐ Cas de l'union disjointe d'un nombre fini d'ensembles : avoir compris que dans ce cas le cardinal de l'union est la somme des cardinaux.
- ☐ $\text{card}(A) + \text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E)$
- ☐ Cardinal de l'union de deux ensembles finis non nécessairement disjoints. (Question de cours)
- ☐ Si E, F sont deux ensembles finis et qu'il existe une bijection de E dans F, alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.
- ☐ Expliquer le principe des tiroirs. (Question de cours)
- ☐ Comprendre le principe multiplicatif, et qu'il s'agit de représenter les différentes possibilités comme les extrémités d'un arbre...
- ☐ Définition de $E_1 \times \cdots \times E_p$ (ses éléments sont des p-listes), et si $E_1, \ldots, E_p$ sont finis, cardinal de $E_1 \times \cdots \times E_p$ (grâce au principe multiplicatif). (Question de cours)
- ☐ Notation E^p. Les p-listes de E sans répétition sont appelées les $p-$arrangements de E.
- ☐ Nombre de $p-$arrangements de E. (Question de cours)
- ☐ Cas particulier des permutations de E et nombre de permutations de E.
- ☐ Les parties à p éléments de E sont appelées les $p-$combinaisons de E. Attention une $p-$combinaison de E est donc un ensemble à p éléments, les éléments n'ont pas d'ordre.
- ☐ Par définition, si E a n éléments, le nombre de $p-$combinaisons de E est $\binom{n}{p}$.
- ☐ Nombre de $p-$arrangements de E en fonction du nombre de $p-$combinaisons, savoir retrouver ainsi l'expression de $\binom{n}{p}$. (Question de cours)
- ☐ Avoir compris qu'il y a $\binom{5}{3}$ 5-listes de $\{0, 1\}$ contenant exactement trois 1, car il y a (par définition) $\binom{5}{3}$ possibilités pour l'ensemble des trois positions des 1.
- ☐ Nombre de parties d'un ensemble E.

Probabilités

Définitions

- ☐ Donner l'univers Ω (l'ensemble des issues possibles) dans des cas simples : on constitue une main de 4 cartes, on lance 5 fois une pièce, etc. (Question de cours)
- ☐ Définition d'un système complet d'événements, d'un événement élémentaire, d'une famille d'événements incompatibles. (Question de cours)
- ☐ Définition d'une probabilité comme une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui vérifie $P(\Omega) = 1$ et la propriété dite d'additivité. (Question de cours)
- ☐ Généralisation de la propriété d'additivité pour deux événements incompatibles à l'additivité pour une famille d'événements incompatibles. (Démonstration exigible en EC1B)
- ☐ A l'aide de la définition d'une probabilité : $P(A) = \sum_{w \in A} P(\{w\})$. Bien comprendre l'intérêt pratique de cette formule sur des exemples simples. (Démonstration exigible en EC1B).
- ☐ Savoir énoncer précisément ce qu'on veut dire par "pour définir une probabilité, il suffit de définir la probabilité de chaque événement élémentaire (avec la condition que la somme des ces probabilités soit égale à 1)" : Plus précisément cela veut dire que si $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$, et qu'on se donne $p_1, \ldots p_n$ des réels positifs tels que $p_1 + \cdots + p_n = 1$, alors il existe une, et une seule, probabilité P sur Ω vérifiant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{x_i\}) = p_i$ (Question de cours).

- ☐ Définition d'une situation d'équiprobabilité, et dans ce cas, pour tout événement A, $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Probabilité d'une union

- ☐ Formule du crible pour 2 ou 3 événements, et application : majorer $P(A \cup B)$ (Question de cours).

Probabilité d'une intersection

- ☐ Donner précisément la définition, étant donné un événement A tel que $P(A) \neq 0$, de la probabilité P_A(Question de cours).
- ☐ Donner la formule des probabilités composées (cas général, intersection de n événements) (Question de cours).
- ☐ Donner (en justifiant) les quatre conditions à vérifier sur une famille de trois événements A, B, C pour qu'ils soient mutuellement indépendants(Question de cours).
- ☐ Donner la définition de l'indépendance de deux événements, puis de l'indépendance mutuelle d'une famille de n événements $A_1, \dots, A_n$. Montrer que $A_1, \dots A_n$ deux à deux indépendants n'implique PAS que $A_1, \dots A_n$ sont mutuellement indépendants avec un contre-exemple(Question de cours).
- ☐ Détailler ce qu'est un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, et donner la probabilité d'un événement élémentaire quelconque, puis la probabilité d'avoir k succès.(Question de cours).
- ☐ Formule des probabilités totales (Question de cours, avec démonstration exigible).

Applications linéaires

- ☐ Savoir déterminer si une fonction donnée est linéaire ou non.
- ☐ $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel (on pourra utiliser que $\mathcal{F}(E, F)$ est un espace vectoriel de référence). (Démonstration exigible en EC1A)
- ☐ Distributivité de la composition sur les endomorphismes. Définition de $P(f)$, pour un polynôme P et f un endomorphisme de E. Comprendre que $P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f)$ (Question de cours : énoncer cette propriété, la vérifier sur un exemple au choix du colleur...)
- ☐ Binôme de Newton pour les endomorphismes qui commutent (Question de cours : l'énoncer, sans la démonstration)
- ☐ Trouver des polynômes annulateurs dans des cas simples.
- ☐ Notion d'isomorphisme, d'automorphisme.
- ☐ La réciproque d'un isomorphisme est encore linéaire. (Démonstration exigible en EC1B)
- ☐ Définition du noyau.
- ☐ Le noyau est un sous-espace vectoriel de E (Démonstration exigible en EC1B).
- ☐ Lien entre injectivité de f et son noyau. (Démonstration exigible).
  Savoir étudier l'injectivité grâce au noyau
- ☐ L'image de $f : E \to F$ est un sous-espace vectoriel de E. (Démonstration exigible en EC1B).
  De plus, si on a une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$. (Démonstration exigible de ce deuxième point).
  A ce stade, pas encore de définition d'une application linéaire en définissant ses vecteurs de base, ni de lien entre l'injectivité et la liberté de $(f(e_1), \dots, f(e_p))$. On rappelle qu'il n'y a pas encore la notion de dimension.