Programme de colle 15

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

Probabilités

Définitions

- ☐ Donner l'univers Ω (l'ensemble des issues possibles) dans des cas simples : on constitue une main de 4 cartes, on lance 5 fois une pièce, etc. (Question de cours).
- ☐ Définition d'un système complet d'événements, d'un événement élémentaire, d'une famille d'événements incompatibles. (Question de cours).
- ☐ Définition d'une probabilité comme une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui vérifie $P(\Omega) = 1$ et la propriété dite d'additivité. (Question de cours).
- ☐ Généralisation de la propriété d'additivité pour deux événements incompatibles à l'additivité pour une famille d'événements incompatibles. (Démonstration exigible en EC1B).
- ☐ A l'aide de la définition d'une probabilité : $P(A) = \sum_{w \in A} P(\{w\})$. Bien comprendre l'intérêt pratique de cette formule sur des exemples simples. (Démonstration exigible en EC1B).
- ☐ Savoir énoncer précisément ce qu'on veut dire par "pour définir une probabilité, il suffit de définir la probabilité de chaque événement élémentaire (avec la condition que la somme des ces probabilités soit égale à 1)" : Plus précisément cela veut dire que si $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$, et qu'on se donne $p_1, \dots p_n$ des réels positifs tels que $p_1 + \cdots + p_n = 1$, alors il existe une, et une seule, probabilité P sur Ω vérifiant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{x_i\}) = p_i$ (Question de cours).
- ☐ Définition d'une situation d'équiprobabilité, et dans ce cas, pour tout événement A, $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Probabilité d'une union

- ☐ Formule du crible pour 2 ou 3 événements, et application : majorer $P(A \cup B)$ (Question de cours).

Probabilité d'une intersection

- ☐ Donner précisément la définition, étant donné un événement A tel que $P(A) \neq 0$, de la probabilité P_A.
- ☐ Donner la formule des probabilités composées (cas général, intersection de n événements) (Question de cours).
- ☐ Donner (en justifiant) les quatre conditions à vérifier sur une famille de trois événements A, B, C pour qu'ils soient mutuellement indépendants(Question de cours).
- ☐ Donner la définition de l'indépendance de deux événements, puis de l'indépendance mutuelle d'une famille de n événements $A_1, \dots, A_n$. Montrer que $A_1, \dots A_n$ deux à deux indépendants n'implique PAS que $A_1, \dots A_n$ sont mutuellement indépendants avec un contre-exemple(Question de cours).
- ☐ Détailler ce qu'est un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, et donner la probabilité d'un événement élémentaire quelconque, puis la probabilité d'avoir k succès.(Question de cours).
- ☐ Formule des probabilités totales (Question de cours, avec démonstration exigible).

Applications linéaires

- ☐ Savoir déterminer si une fonction donnée est linéaire ou non.
- ☐ $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel (on pourra utiliser que $\mathcal{F}(E, F)$ est un espace vectoriel de référence). (Démonstration exigible)
- ☐ Distributivité de la composition sur les endomorphismes. Définition de $P(f)$, pour un polynôme P et f un endomorphisme de E. Comprendre que $P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f)$ (Question de cours : énoncer cette propriété, la vérifier sur un exemple au choix du colleur...)
- ☐ Binôme de Newton pour les endomorphismes qui commutent (Question de cours : l'énoncer, sans la démonstration).
- ☐ Trouver des polynômes annulateurs dans des cas simples.

- ☐ Notion d'isomorphisme, d'automorphisme.
- ☐ La réciproque d'un isomorphisme est encore linéaire. (Démonstration exigible en EC1B).
- ☐ Définition du noyau.
- ☐ Le noyau est un sous-espace vectoriel de E (Démonstration exigible).
- ☐ Lien entre injectivité de f et son noyau. (Démonstration exigible).
  Savoir étudier l'injectivité grâce au noyau
- ☐ L'image de $f : E \to F$ est un sous-espace vectoriel de E. (Démonstration exigible).
- ☐ Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$. (Démonstration exigible. Ainsi f est surjective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est génératrice de F.
- ☐ Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, f est injective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est libre (Démonstration exigible).
- ☐ On suppose encore que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E. Soient $f_1, \dots, f_p \in F$. Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(e_1) = f_1, f(e_2) = f_2, \dots, f(e_p) = f_p$. (Question de cours : énoncer précisément ce résultat, l'illustrer sur un exemple de son choix, et prouver l'unicité seulement, pas l'existence)
- ☐ Pratiquement ce résultat est utilisé principalement de deux façons :
  - Pour définir une application linéaire $f : E \to F$ il suffit de définir $f(e_1), \cdots, f(e_p)$
  - Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ sont telles que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) = g(e_i)$, alors $f = g$ (c'est l'unicité). On pourra y penser par exemple pour montrer qu'une application linéaire est nulle : il suffit de montrer que l'image d'une base est nulle.

Intégration

- ☐ Définition d'intégrale d'une fonction continue comme l'aire algébrique (ou : aire signée) sous la courbe...
- ☐ Relation de Chasles.
- ☐ Linéarité.
- ☐ Croissance de l'intégrale.
- ☐ Inégalité triangulaire (Démonstration exigible en utilisant la croissance de l'intégrale).
- ☐ Positivité de l'intégrale d'une fonction positive. Cas d'égalité. (Question de cours : énoncer la positivité et le cas d'égalité très précisément).
- ☐ Si une fonction f admet une primitive F sur un intervalle I alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions $\{F + C \,|\, C \in \mathbb{R}\}$. (Démonstration exigible)
- ☐ Savoir vérifier qu'une fonction g est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I.
- ☐ Connaître ses primitives usuelles (il suffit de connaître ses dérivées usuelles).
- ☐ Savoir reconnaître une fonction de la forme $x \mapsto u'(x)f(u(x))$, avec f qui admet une primitve F, afin d'en déterminer une primitive : $x \mapsto F(u(x))$.
- ☐ Théorème fondamental de l'analyse, et sa conséquence : si on connaît une primitive, on sait cacluler l'intégrale entre a et b. (Question de cours : l'énoncer précisément.).
- ☐ (En EC1A seulement) Définition (et représentation graphique) des sommes de Riemann à gauche et à droite d'une fonction continue sur $[a, b]$, et théorème de convergence des sommes vers l'intégrale. (Question de cours). Savoir reconnaître une somme des Riemann pour calculer une limite.

Pas encore d'intégration par partie ni de changement de variable à ce stade.