Programme de colle 16

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

Applications linéaires

- ☐ Savoir déterminer si une fonction donnée est linéaire ou non.
- ☐ $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel (on pourra utiliser que $\mathcal{F}(E,F)$ est un espace vectoriel de référence). (Démonstration exigible)
- ☐ Distributivité de la composition sur les endomorphismes. Définition de $P(f)$, pour un polynôme P et f un endomorphisme de E. Comprendre que $P(f)\circ Q(f) = (PQ)(f)$ (Question de cours : énoncer cette propriété, la vérifier sur un exemple au choix du colleur...)
- ☐ Binôme de Newton pour les endomorphismes qui commutent (Question de cours : l'énoncer, sans la démonstration).
- ☐ Trouver des polynômes annulateurs dans des cas simples.
- ☐ Notion d'isomorphisme, d'automorphisme.
- ☐ La réciproque d'un isomorphisme est encore linéaire. (Démonstration exigible en EC1B).
- ☐ Définition du noyau.
- ☐ Le noyau est un sous-espace vectoriel de E (Démonstration exigible).
- ☐ Lien entre injectivité de f et son noyau. (Démonstration exigible).
  Savoir étudier l'injectivité grâce au noyau
- ☐ L'image de $f : E \to F$ est un sous-espace vectoriel de F. (Démonstration exigible).
- ☐ Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_p))$. (Démonstration exigible. Ainsi f est surjective si et seulement si $(f(e_1),\dots,f(e_p))$ est génératrice de F.
- ☐ Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E, f est injective si et seulement si $(f(e_1),\dots,f(e_p))$ est libre (Démonstration exigible).
- ☐ On suppose encore que $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E. Soient $f_1,\dots,f_p \in F$. Il existe une unique application linéaire $f\in\mathcal{L}(E,F)$ telle que $f(e_1) = f_1, f(e_2) = f_2, \dots, f(e_p) = f_p$. (Question de cours : énoncer précisément ce résultat, l'illustrer sur un exemple de son choix, et prouver l'unicité seulement, pas l'existence)
- ☐ Pratiquement ce résultat est utilisé principalement de deux façons :
  - Pour définir une application linéaire $f : E \to F$ il suffit de définir $f(e_1),\cdots,f(e_p)$
  - Si $f,g\in\mathcal{L}(E,F)$ sont telles que pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $f(e_i) = g(e_i)$, alors $f = g$ (c'est l'unicité). On pourra y penser par exemple pour montrer qu'une application linéaire est nulle : il suffit de montrer que l'image d'une base est nulle.

Intégration

- ☐ Définition d'intégrale d'une fonction continue comme l'aire algébrique (ou : aire signée) sous la courbe...
- ☐ Relation de Chasles.
- ☐ Linéarité.
- ☐ Croissance de l'intégrale.
- ☐ Inégalité triangulaire (Démonstration exigible en utilisant la croissance de l'intégrale).
- ☐ Positivité de l'intégrale d'une fonction positive. Cas d'égalité. (Question de cours : énoncer la positivité et le cas d'égalité très précisément).
- ☐ Si une fonction f admet une primitive F sur un <u>intervalle</u> I alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions $\{F + C \mid C\in\mathbb{R}\}$. (Démonstration exigible)
- ☐ Savoir vérifier qu'une fonction g est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I.
- ☐ Connaître ses primitives usuelles (il suffit de connaître ses dérivées usuelles).
- ☐ Savoir reconnaître une fonction de la forme $x\mapsto u'(x)f(u(x))$, avec f qui admet une primitve F, afin d'en déterminer une primitive : $x\mapsto F(u(x))$.
- ☐ Savoir, dans certains cas concrets, décomposer un quotient de deux polynômes avec le dénominateur de degré ≤ 2 comme une combinaison linéaire de fonctions qu'on sait primitiver (avec ln ou arctan).
- ☐ Théorème fondamental de l'analyse, et sa conséquence : si on connaît une primitive, on sait cacluler l'intégrale entre a et b.

(Question de cours : l'énoncer précisément).

- ☐ Définition (et représentation graphique) des sommes de Riemann à gauche et à droite d'une fonction continue sur $[a, b]$, et théorème de convergence des sommes vers l'intégrale. (Question de cours). Savoir reconnaître une somme de Riemann pour calculer une limite.
- ☐ Intégration par parties. (Démonstration exigible).
- ☐ Formule du changement de variables. (Démonstration exigible).