

Programme de colle 17

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

Intégration

- ☐ Définition d'intégrale d'une fonction continue comme l'aire algébrique (ou : aire signée) sous la courbe...
- ☐ Relation de Chasles.
- ☐ Linéarité.
- ☐ Croissance de l'intégrale.
- ☐ Inégalité triangulaire ([Démonstration exigible en utilisant la croissance de l'intégrale](#)).
- ☐ Positivité de l'intégrale d'une fonction positive. Cas d'égalité. ([Question de cours : énoncer la positivité et le cas d'égalité très précisément](#)).
- ☐ Si une fonction f admet une primitive F sur un intervalle I alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions $\{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$. ([Démonstration exigible](#))
- ☐ Savoir vérifier qu'une fonction g est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I .
- ☐ Connaître ses primitives usuelles (il suffit de connaître ses dérivées usuelles).
- ☐ Savoir reconnaître une fonction de la forme $x \mapsto u'(x)f(u(x))$, avec f qui admet une primitive F , afin d'en déterminer une primitive : $x \mapsto F(u(x))$.
- ☐ Savoir, dans certains cas concrets, décomposer un quotient de deux polynômes avec le dénominateur de degré ≤ 2 comme une combinaison linéaire de fonctions qu'on sait primitiver (avec $\ln$ ou $\arctan$).
- ☐ Théorème fondamental de l'analyse, et sa conséquence : si on connaît une primitive, on sait calculer l'intégrale entre a et b . ([Question de cours : l'énoncer précisément](#)).
- ☐ Définition (et représentation graphique) des sommes de Riemann à gauche et à droite d'une fonction continue sur $[a, b]$, et théorème de convergence des sommes vers l'intégrale. ([Question de cours](#)). Savoir reconnaître une somme de Riemann pour calculer une limite.
- ☐ Intégration par parties. ([Démonstration exigible](#)).
- ☐ Formule du changement de variables. ([Démonstration exigible](#)).

Variable aléatoire réelle sur un univers fini

- ☐ Définition de variable aléatoire comme fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.
- ☐ Notion d'événements définis à partir d'une variable aléatoire : définition générale pour $D \subset \mathbb{R}$ de $[X \in D]$.
Notation $[X = x]$, $[X \leq x]$, $[X > x]$ etc.
- ☐ Système complet d'événements lié à une variable aléatoire réelle finie.

Loi de probabilité

- ☐ Donner la loi d'une variable aléatoire X réelle finie, c'est donner son univers image $X(\Omega)$ et donner pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x)$.
- ☐ Pour des réels $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et des réels positifs $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, il existe un univers Ω fini et une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = x_i) = p_i$.
- ☐ Savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire X et déterminer à partir de la loi de X celle de $g(X)$ où g est une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Fonction de répartition

- ☐ Définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

- ☐ Connaître l'allure de la fonction de répartition pour des variables aléatoires réelles finies. Savoir y lire les éléments de $X(\Omega)$ et les probabilités des événements $[X = x]$.
- ☐ Croissance, caractère constant par morceaux, limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction de répartition.
- ☐ Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, savoir exprimer les probabilités de $X = x_i$ avec la fonction de répartition. [\(Démonstration exigible\)](#)

Indépendance de variables aléatoires

- ☐ Définition d'indépendance de deux variables aléatoires
- ☐ Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ aussi.
- ☐ Si X et Y sont indépendantes alors pour tous $C, D \subset \mathbb{R}$, $[X \in C]$ et $[Y \in D]$ sont des événements indépendants.
- ☐ Définition d'indépendance mutuelle de variables aléatoires. Généralisation des deux points précédents à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Espérance

- ☐ Deux définitions de l'espérance de X (une avec une somme sur les $w \in \Omega$ utile en pratique, l'autre avec une somme sur les $x \in X(\Omega)$ plus utile dans la théorie).
- ☐ Définition de variable aléatoire centrée.
- ☐ Linéarité de l'espérance [\(Démonstration exigible\)](#).
- ☐ Positivité et croissance de l'espérance.
- ☐ Inégalité triangulaire.
- ☐ Formule de transfert.
- ☐ Lien entre l'espérance de l'indicatrice d'un événement A et $P(A)$.
- ☐ Dans le cas de variables aléatoires **mutuellement indépendantes**, l'espérance du produit est le produit des espérances.

Variance

- ☐ Définition de la variance de X .
- ☐ Notion de variable aléatoire réduite.
- ☐ Formule de Koenig-Huygens. [\(Démonstration exigible\)](#)
- ☐ $V(aX + b) = \dots$ [\(Démonstration exigible\)](#)
- ☐ Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires **mutuellement indépendantes**. Alors $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$

Lois usuelles

- ☐ Loi certaine. Espérance et Variance.
- ☐ Loi uniforme sur E . Espérance et variance. [\(Démonstrations exigibles avec \$E = \llbracket 1, n \rrbracket\$ \)](#)
- ☐ Loi de Bernoulli. Espérance et variance. [\(Démonstrations exigibles\)](#)
- ☐ Loi Binomiale. Espérance et variance [\(Démonstration exigible en utilisant que la somme de \$n\$ variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre \$p\$ suit une loi binomiale de paramètre \$n\$ et \$p\$ \)](#).

Notes pour les colleurs : peu d'exercices ont été faits pour l'instant sur les variables aléatoires.