

Programme de colle 18

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), à préparer des questions à poser en classe, ou à prendre un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

Variable aléatoire réelle sur un univers fini

- ☐ Définition de variable aléatoire comme fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.
- ☐ Notion d'événements définis à partir d'une variable aléatoire : définition générale pour $D \subset \mathbb{R}$ de $[X \in D]$.
Notation $[X = x]$, $[X \leq x]$, $[X > x]$ etc.
- ☐ Système complet d'événements lié à une variable aléatoire réelle finie.

Loi de probabilité

- ☐ Donner la loi d'une variable aléatoire X réelle finie, c'est donner son univers image $X(\Omega)$ et donner pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x)$.
- ☐ Pour des réels $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et des réels positifs $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, il existe un univers Ω fini et une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = x_i) = p_i$.
- ☐ Savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire X et déterminer à partir de la loi de X celle de $g(X)$ où g est une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Fonction de répartition

- ☐ Définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- ☐ Connaître l'allure de la fonction de répartition pour des variables aléatoires réelles finies. Savoir y lire les éléments de $X(\Omega)$ et les probabilités des événements $[X = x]$.
- ☐ Croissance, caractère constant par morceaux, limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction de répartition.
- ☐ Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, savoir exprimer les probabilités de $X = x_i$ avec la fonction de répartition.
([Démonstration exigible](#))

Indépendance de variables aléatoires

- ☐ Définition d'indépendance de deux variables aléatoires
- ☐ Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ aussi.
- ☐ Si X et Y sont indépendantes alors pour tous $C, D \subset \mathbb{R}$, $[X \in C]$ et $[Y \in D]$ sont des événements indépendants.
- ☐ Définition d'indépendance mutuelle de variables aléatoires. Généralisation des deux points précédents à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Espérance

- ☐ Deux définitions de l'espérance de X (une avec une somme sur les $w \in \Omega$ utile en pratique, l'autre avec une somme sur les $x \in X(\Omega)$ plus utile dans la théorie).
- ☐ Définition de variable aléatoire centrée.
- ☐ Linéarité de l'espérance ([Démonstration exigible](#)).
- ☐ Positivité et croissance de l'espérance.
- ☐ Inégalité triangulaire.
- ☐ Formule de transfert.
- ☐ Lien entre l'espérance de l'indicatrice d'un événement A et $P(A)$.
- ☐ Dans le cas de variables aléatoires **mutuellement indépendantes**, l'espérance du produit est le produit des espérances.

Variance

- ☐ Définition de la variance de X .
- ☐ Notion de variable aléatoire réduite.
- ☐ Formule de Koenig-Huygens. (Démonstration exigible)
- ☐ $V(aX + b) = \dots$ (Démonstration exigible)
- ☐ Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires **mutuellement indépendantes**. Alors
$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$$

Lois usuelles

- ☐ Loi certaine. Espérance et Variance.
- ☐ Loi uniforme sur E . Espérance et variance. (Démonstrations exigibles avec $E = \llbracket 1, n \rrbracket$)
- ☐ Loi de Bernoulli. Espérance et variance. (Démonstrations exigibles)
- ☐ Loi Binomiale. Espérance et variance (Démonstration exigible en utilisant que la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p suit une loi binomiale de paramètre n et p).

Analyse asymptotique

- ☐ Définition (avec le quotient en EC1A) de l'équivalence de deux suites et de $u_n = o(v_n)$. Définitions similaires pour les fonctions.
- ☐ Propriétés des équivalents : symétrie, transitivité, compatibilité avec la multiplication et le quotient, compatibilité avec la puissance α (α fixé). (Question de cours, démonstration (d'une des propriétés) exigible en utilisant le quotient).
- ☐ Si $u_n \sim v_n$, et si (v_n) admet une limite (finie ou non), alors (u_n) admet cette même limite. (Démonstration exigible).
- ☐ Si $u_n \sim v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n ont le même signe. (Démonstration exigible).
- ☐ Donner des suites $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$ telles que $u_n + v_n$ ne soit PAS équivalent à $a_n + b_n$. (Question de cours).
- ☐ Donner une fonction f et des suites u, v telles que $u_n \sim v_n$ mais $f(u_n)$ PAS équivalent à $f(v_n)$. (Question de cours).
- ☐ Propriété de substitution : si $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} x_0$ et $u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} v(x)$, que dire de $u(x(t))$ et $v(x(t))$ quand $t \rightarrow t_0$?
- ☐ Équivalence entre $v_n - u_n = o(u_n)$ et $u_n \sim v_n$. (Démonstration exigible).
- ☐ Équivalents usuels (ou, ce qui revient au même, "petits o usuels" de) $(\sin(x), 1 - \cos(x), \tan(x), \arctan(x), \ln(1+x), e^x - 1, (1+x)^\alpha$ quand $x \rightarrow 0$. Équivalent d'un polynôme en $\pm\infty$. Application en particulier à $\sin(u_n), 1 - \cos(u_n)$, etc. pour une suite (u_n) telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- ☐ Propriétés des o : transitivité, somme et différence (la somme et la différence de deux $o(w_n)$ est un $o(w_n)$...), multiplication par une suite (si $u_n = o(v_n)$, $a_n u_n = o(a_n v_n)$), simplification par un réel (si $u_n = o(10n)$, $u_n = o(n)$ par exemple...). (Question de cours, démonstration (d'une des propriétés) exigible en utilisant le quotient).
- ☐ Croissances comparées.
- ☐ Énoncer les reformulations des propriétés " f continue en x_0 " et " f dérivable en x_0 " avec des o . (Question de cours).
- ☐ Bonus en EC1A : Calculer mentalement de bonnes approximations de, par exemple, 1.01^{100} , $\sqrt{10001}$...

Note pour les colleurs : il n'y a pas encore de notion de développement limité (juste quelques "petits o usuels" qui viennent des équivalents usuels). Nous vous demandons de donner au moins un exercice sur l'analyse asymptotique pendant la colle.