

Programme de colle 19

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), à préparer des questions à poser en classe, ou à prendre un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

Variable aléatoire réelle sur un univers fini

- Définition de variable aléatoire comme fonction de Ω dans \mathbb{R} .
- Notion d'événements définis à partir d'une variable aléatoire : définition générale pour $D \subset \mathbb{R}$ de $[X \in D]$.
Notation $[X = x]$, $[X \leq x]$, $[X > x]$ etc.
- Système complet d'événements lié à une variable aléatoire réelle finie.

Loi de probabilité

- Donner la loi d'une variable aléatoire X réelle finie, c'est donner son univers image $X(\Omega)$ et donner pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x)$.
- Pour des réels $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et des réels positifs $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, il existe un univers Ω fini et une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = x_i) = p_i$.
- Savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire X et déterminer à partir de la loi de X celle de $g(X)$ où g est une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans \mathbb{R} .

Fonction de répartition

- Définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- Connaître l'allure de la fonction de répartition pour des variables aléatoires réelles finies. Savoir y lire les éléments de $X(\Omega)$ et les probabilités des événements $[X = x]$.
- Croissance, caractère constant par morceaux, limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction de répartition.
- Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, savoir exprimer les probabilités de $X = x_i$ avec la fonction de répartition.
([Démonstration exigible](#))

Indépendance de variables aléatoires

- Définition d'indépendance de deux variables aléatoires
- Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ aussi.
- Si X et Y sont indépendantes alors pour tous $C, D \subset \mathbb{R}$, $[X \in C]$ et $[Y \in D]$ sont des événements indépendants.
- Définition d'indépendance mutuelle de variables aléatoires. Généralisation des deux points précédents à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Espérance

- Deux définitions de l'espérance de X (une avec une somme sur les $w \in \Omega$ utile en pratique, l'autre avec une somme sur les $x \in X(\Omega)$ plus utile dans la théorie).
- Définition de variable aléatoire centrée.
- Linéarité de l'espérance ([Démonstration exigible](#)).
- Positivité et croissance de l'espérance.
- Inégalité triangulaire.
- Formule de transfert.
- Lien entre l'espérance de l'indicatrice d'un événement A et $P(A)$.
- Dans le cas de variables aléatoires **mutuellement indépendantes**, l'espérance du produit est le produit des espérances.

Variance

- Définition de la variance de X .
- Notion de variable aléatoire réduite.
- Formule de Koenig-Huygens. (Démonstration exigible)
- $V(aX + b) = \dots$ (Démonstration exigible)
- Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires **mutuellement indépendantes**. Alors
 $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$

Lois usuelles

- Loi certaine. Espérance et Variance.
- Loi uniforme sur E . Espérance et variance. (Démonstrations exigibles avec $E = \llbracket 1, n \rrbracket$)
- Loi de Bernoulli. Espérance et variance. (Démonstrations exigibles)
- Loi Binomiale. Espérance et variance (Démonstration exigible en utilisant que la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p suit une loi binomiale de paramètre n et p).

Analyse asymptotique

- Définition (avec le quotient en EC1A) de l'équivalence de deux suites et de $u_n = o(v_n)$. Définitions similaires pour les fonctions.
- Propriétés des équivalents : symétrie, transitivité, compatibilité avec la multiplication et le quotient, compatibilité avec la puissance α (α fixé). (Question de cours, démonstration (d'une des propriétés) exigible en utilisant le quotient).
- Si $u_n \sim v_n$, et si (v_n) admet une limite (finie ou non), alors (u_n) admet cette même limite. (Démonstration exigible).
- Si $u_n \sim v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n ont le même signe. (Démonstration exigible).
- Donner des suites $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$ telles que $u_n + a_n$ ne soit PAS équivalent à $v_n + b_n$. (Question de cours).
- Donner une fonction f et des suites u, v telles que $u_n \sim v_n$ mais $f(u_n)$ PAS équivalent à $f(v_n)$. (Question de cours).
- Propriété de substitution : si $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} x_0$ et $u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} v(x)$, que dire de $u(x(t))$ et $v(x(t))$ quand $t \rightarrow t_0$?
- Équivalence entre $v_n - u_n = o(u_n)$ et $u_n \sim v_n$. (Démonstration exigible).
- Équivalents usuels (ou, ce qui revient au même, "petits o usuels" de) $(\sin(x), 1 - \cos(x), \tan(x), \arctan(x), \ln(1 + x), e^x - 1, (1 + x)^\alpha$ quand $x \rightarrow 0$. Équivalent d'un polynôme en $\pm\infty$. Application en particulier à $\sin(u_n), 1 - \cos(u_n)$, etc. pour une suite (u_n) telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- Propriétés des o : transitivité, somme et différence (la somme et la différence de deux $o(w_n)$ est un $o(w_n)$...), multiplication par une suite (si $u_n = o(v_n)$, $a_n u_n = o(a_n v_n)$, simplification par un réel (si $u_n = o(10n)$, $u_n = o(n)$ par exemple...). (Question de cours, démonstration (d'une des propriétés) exigible en utilisant le quotient).
- Croissances comparées.
- Énoncer les reformulations des propriétés " f continue en x_0 " et " f dérivable en x_0 " avec des o . (Question de cours).
- Bonus en EC1A : Calculer mentalement de bonnes approximations de, par exemple, 1.01^{100} , $\sqrt{10001}$...

Séries

- Savoir que ce qu'on appelle "la série de terme général u_n " est notée $\sum u_n$ et que cela est la SUITE des SOMMES PARTIELLES : $\sum u_n = \left(\sum_{n=0}^N u_n \right)_{N \geq 0}$ (ou si vous préférez, $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \geq 0}$, les variables sont muettes). Définition analogue dans le cas où (u_n) n'est défini qu'à partir d'un rang n_0 .
- Les séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ ont même nature (vu que les sommes partielles ne diffèrent que de la constante $\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$).
- Définition du reste d'indice n d'une série, et écriture sous la forme d'une somme infinie.
- Stabilité des séries convergentes : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ converge aussi (Question de cours, démonstration exigible).
- Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et la réciproque est fautive (vocabulaire : série grossièrement divergente). (Question de cours, démonstration exigible).

- Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et la réciproque est fautive (pour la réciproque fautive : on admettra que $\sum (-1)^n/n$ converge). (Question de cours, démonstration exigible).
- Soit $q \in]-1, 1[$. Convergence et sommes des séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$. (Seule la démonstration pour $\sum q^n$ est exigible, les autres NON).
- Notion de série à termes positifs, une série à terme positifs converge si et seulement si elle est majorée (c'est-à-dire s'il existe un majorant des sommes partielles). (Question de cours, démonstration exigible).
- Connaître la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de $\alpha > 0$. (Démonstration NON exigible, mais compréhension de la méthode de comparaison avec des intégrales essentielle).
- Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ (ou juste à pcr). Alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge; et (par contraposée) $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge. (Question de cours, démonstration exigible).
- Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ (ou juste à pcr), et que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
- Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$ (ou juste à pcr), que $u_n = o(v_n)$, et que $\sum v_n$ converge. Alors $\sum u_n$ est absolument convergent. (Énoncer précisément les trois critères de comparaison, donner des contre-exemples dans chaque cas si on enlève l'hypothèse de positivité).
- Convergence et somme de séries exponentielles. (Démonstration NON exigible).
- Séries télescopiques : $\sum u_{n+1} - u_n$ et (u_n) ont même nature. (Question de cours, démonstration exigible).