Programme de colle 21

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), à préparer des questions à poser en classe, ou à prendre un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

Séries

- ☐ Savoir que ce qu'on appelle "la série de terme général u_n" est notée $\sum u_n$ et que cela est la SUITE des SOMMES PARTIELLES : $\sum u_n = \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\geq 0}$ (ou si vous préférez, $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geq 0}$, les variables sont muettes). Définition analogue dans le cas où (u_n) n'est défini qu'à partir d'un rang n_0.
- ☐ Les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ ont même nature (vu que les sommes partielles ne diffèrent que de la constante $\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$).
- ☐ Définition du reste d'indice n d'une série, et écriture sous la forme d'une somme infinie.
- ☐ Stabilité des séries convergentes : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ converge aussi (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, et la réciproque est fausse (vocabulaire : série grossièrement divergente). (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et la réciproque est fausse (pour la réciproque fausse : on admettra que $\sum(-1)^n/n$ converge). (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Soit $q \in]-1,1[$. Convergence et sommes des séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$. (Seule la démonstration pour $\sum q^n$ est exigible, les autres NON).
- ☐ Notion de série à termes positifs, une série à terme positifs converge si et seulement si elle est majorée (c'est-à-dire s'il existe un majorant des sommes partielles). (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Connaître la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de $\alpha > 0$. (Démonstration NON exigible, mais compréhension de la méthode de comparaison avec des intégrales essentielle).
- ☐ Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ (ou juste àpcr). Alors
  $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge ; et (par contraposée) $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge. (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ (ou juste àpcr), et que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
- ☐ Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$ (ou juste àpcr), que $u_n = o(v_n)$, et que $\sum v_n$ converge. Alors $\sum u_n$ est absolument convergente. (Énoncer précisément les trois critères de comparaison, donner des contre-exemples dans chaque cas si on enlève l'hypothèse de positivité).
- ☐ Convergence et somme de séries exponentielles. (Démonstration NON exigible).
- ☐ Séries télescopiques : $\sum u_{n+1} - u_n$ et (u_n) ont même nature. (Question de cours, démonstration exigible).

Espaces vectoriels, dimension finie

Somme de sous-espaces vectoriels dans le cas général

- ☐ Définition de $F + G$ (pour F et G deux s.e.v. d'un e.v. E)
- ☐ Définition de "F et G sont en somme directe", et caractérisation avec l'intersection réduite à 0_E. (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Définition de "F et G sont supplémentaires dans E" : $E = F \oplus G$. Comprendre que cela revient à montrer, pour tout $u \in E$, qu'il existe $(f, g) \in F \times G$ tels que $u = f + g$ ($E = F + G$), et que de plus ce couple (f, g) est unique (F et G sont en somme directe). Bien sûr on peut aussi penser à utiliser la caractérisation de la somme directe avec l'intersection.
- ☐ Caractérisation de la somme directe par concaténation des bases.
- ☐ Généralisation, avec la définition de $F_1 + \cdots + F_p$, de "$F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe", de "$F_1, \ldots, F_p$ sont supplémentaires dans E.

Dimension finie

- ☐ Définition de "E est de dimension finie".
- ☐ Théorème de la base incomplète : Si E est de dimension finie, toute famille libre de E peut être complétée en base de E.
- ☐ Conséquence - Théorème de la base extraite : De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E. (En conséquence, E admet au moins une base)
- ☐ Si $\mathcal{L}$ est une famille libre et $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathcal{L}$ a un nombre de vecteurs inférieur ou égal à celui de $\mathcal{G}$.
- ☐ Si E est de dimension finie, toute base de E a le même nombre d'éléments, qu'on note $\dim(E)$.
- ☐ Si E est de dimension n, toute famille libre de E a au plus n éléments, toute famille génératrice de E a au moins n éléments, et cas d'égalités : toute famille libre de n éléments est une base, toute famille génératrice de n éléments est une base. (Question de cours, démonstration d'un des deux cas d'égalités exigible).
- ☐ Si E est de dimension n, tout s.e.v. F de E est de dimension finie et majorée par n. De plus, si $\dim(F) = E$, alors $F = E$. (Question de cours, démonstration du cas d'égalité exigible).
- ☐ Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet (au moins) un supplémentaire (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ En dimension finie, formule de Grassmann : $\dim(F + G) = ...$
- ☐ En dimension finie, F et G sont en somme directe si et seulement si $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$.
- ☐ Comprendre que cela implique que si $E = F \oplus G$, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, mais que la réciproque est fausse.
- ☐ En dimension finie, deux autres caractérisations de $E = F \oplus G$:
  — $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F \cap G = \{0_E\}$;
  — $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F + G = E$.
- ☐ Définition du rang d'une famille de vecteurs de E. Le rang est inférieur ou égal au nombre de vecteurs de la famille, et à la dimension de E. Cas d'égalités. (Question de cours, démonstration exigible).