

# Programme de colle 22

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), à préparer des questions à poser en classe, ou à prendre un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

## Espaces vectoriels, dimension finie

### Somme de sous-espaces vectoriels dans le cas général

- Définition de  $F + G$  (pour  $F$  et  $G$  deux s.e.v. d'un e.v.  $E$ )
- Définition de " $F$  et  $G$  sont en somme directe", et caractérisation avec l'intersection réduite à  $0_E$ . ([Question de cours, démonstration exigible](#)).
- Définition de " $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ " :  $E = F \oplus G$ . Comprendre que cela revient à montrer, pour tout  $u \in E$ , qu'il existe  $(f, g) \in F \times G$  tels que  $u = f + g$  ( $E = F + G$ ), et que de plus ce couple  $(f, g)$  est unique ( $F$  et  $G$  sont en somme directe). Bien sûr on peut aussi penser à utiliser la caractérisation de la somme directe avec l'intersection.
- Caractérisation de la somme directe par concaténation des bases.
- Généralisation, avec la définition de  $F_1 + \dots + F_p$ , de " $F_1, \dots, F_p$  sont en somme directe", de " $F_1, \dots, F_p$  sont supplémentaires dans  $E$ ".

### Dimension finie

- Définition de " $E$  est de dimension finie".
- Théorème de la base incomplète : Si  $E$  est de dimension finie, toute famille libre de  $E$  peut être complétée en base de  $E$ .
- Conséquence - Théorème de la base extraite : De toute famille génératrice de  $E$  on peut extraire une base de  $E$ . (En conséquence,  $E$  admet au moins une base)
- Si  $\mathcal{L}$  est une famille libre et  $\mathcal{G}$  est une famille génératrice de  $E$ , alors  $\mathcal{L}$  a un nombre de vecteurs inférieur ou égal à celui de  $\mathcal{G}$ .
- Si  $E$  est de dimension finie, toute base de  $E$  a le même nombre d'éléments, qu'on note  $\dim(E)$ .
- Si  $E$  est de dimension  $n$ , toute famille libre de  $E$  a au plus  $n$  éléments, toute famille génératrice de  $E$  a au moins  $n$  éléments, et cas d'égalités : toute famille libre de  $n$  éléments est une base, toute famille génératrice de  $n$  éléments est une base. ([Question de cours, démonstration d'un des deux cas d'égalités exigible](#)).
- Si  $E$  est de dimension  $n$ , tout s.e.v.  $F$  de  $E$  est de dimension finie et majorée par  $n$ . De plus, si  $\dim(F) = E$ , alors  $F = E$ . ([Question de cours, démonstration du cas d'égalité exigible](#)).
- Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet (au moins) un supplémentaire ([Question de cours, démonstration exigible](#)).
- En dimension finie, formule de Grassmann :  $\dim(F + G) = \dots$
- En dimension finie,  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ .
- Comprendre que cela implique que si  $E = F \oplus G$ , alors  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ , mais que la réciproque est fautive.
- En dimension finie, deux autres caractérisations de  $E = F \oplus G$  :
  - $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$  et  $F \cap G = \{0_E\}$  ;
  - $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$  et  $F + G = E$ .
- Définition du rang d'une famille de vecteurs de  $E$ . Le rang est inférieur ou égal au nombre de vecteurs de la famille, et à la dimension de  $E$ . Cas d'égalités. ([Question de cours, démonstration exigible](#)).

## Probabilités dans un univers quelconque

- Définition, pour  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\Omega)^{\mathbb{N}}$ , de  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$  et de  $\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k$  ; interprétation (savoir écrire, par exemple, l'événement "n'obtenir que des Piles"). Notion de suite d'ensembles croissante/décroissante au sens de l'inclusion.
- $\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$  est croissante ;  $\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$  est décroissante ;  $\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$  est décroissante ;  $\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$  est croissante. ([Question de](#)

cours, démonstration de l'un des quatre exigible).

- Notion d'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .
- Savoir énoncer précisément la propriété de  $\sigma$ -additivité, montrer que cela implique notamment la propriété additivité d'une famille finie d'événements incompatibles. (Question de cours, démonstration exigible).
- Notions d'événements presque-sûrs et négligeables.
- Savoir énoncer précisément la formule des probabilités totales (Question de cours, démonstration exigible).
- Savoir énoncer précisément le théorème de la limite monotone et la conséquence du théorème (où il n'y pas d'hypothèse de monotonie sur la suite d'événements) (Question de cours, et savoir démontrer la conséquence à l'aide du théorème de la limite monotone).
- Définition de l'indépendance mutuelle d'une famille  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements. (Question de cours)

**Note pour les colleurs : on parlera d'ensemble des événements plutôt que de tribu, on admettra toujours que les ensembles considérés sont bien des événements.**