Programme de colle 23

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), à préparer des questions à poser en classe, ou à prendre un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

Probabilités dans un univers quelconque

- ☐ Définition, pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\Omega)^{\mathbb{N}}$, de $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$ et de $\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k$; interprétation (savoir écrire, par exemple, l'événement "n'obtenir que des Piles"). Notion de suite d'ensembles croissante/décroissante au sens de l'inclusion.
- ☐ $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$ est croissante ; $\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$ est décroissante ; $\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$ est décroissante ; $\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$ est croissante.(Question de cours, démonstration de l'un des quatre exigible).
- ☐ Notion d'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- ☐ Savoir énoncer précisément la propriété de σ-additivité.(Question de cours).
- ☐ Notions d'événements presque-sûrs et négligeables.
- ☐ Savoir énoncer précisément la formule des probabilités totales (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Savoir énoncer précisément le théorème de la limite monotone et la conséquence du théorème (où il n'y pas d'hypothèse de monotonie sur la suite d'événements) (Question de cours, et savoir démontrer la conséquence à l'aide du théorème de la limite monotone).
- ☐ Définition de l'indépendance mutuelle d'une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements. (Question de cours)

Variables aléatoires discrètes

- ☐ Définition d'une variable aléatoire discrète. Dans la suite, X est une variable aléatoire discrète.
- ☐ $([X = x])_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En conséquences, la série $\sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x)$ converge et sa somme vaut 1.
- ☐ Si on connaît la loi de X, savoir en déduire pour tout $D \subset \mathbb{R}$, $P(X \in D)$ grâce à la formule $P(X \in D) = \sum_{x\in X(\Omega)\cap D} P(X = x)$.
- ☐ Existence d'une variable aléatoire d'une loi donnée (à quelle condition sur la famille de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-on considérer une variable aléatoire X vérifiant $P(X = x_n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?)
- ☐ Définition de F_X, propriétés de base :
  - F_X est croissante (au sens large) ;
  - F_X a pour limite 0 en $-\infty$;
  - F_X a pour limite 1 en $+\infty$

  (Question de cours, démonstration exigible de la limite en $-\infty$).
- ☐ X et Y ont la même loi si et seulement si X et Y ont la même fonction de répartition.
- ☐ Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, $P(X > a) = 1 - F_X(a)$ et $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Définition de l'indépendance mutuelle d'une famille de variables aléatoires discrètes.
- ☐ En notant $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec les x_n sont deux à deux distincts (remarquez que souvent, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $x_n = n$) : On dit que X admet une espérance si $\sum x_n P(X = x_n)$ **converge absolument**.

  Dans ce cas, $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$; ce qu'on note aussi : $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$.
- ☐ Linéarité de l'espérance. Notation $X \leq Y$ signifiant : pour tout $w \in \Omega, X(w) \leq Y(w)$. a) Si X admet une espérance et que $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$. b) Si $X \leq Y$, et que X et Y admettent une espérance, alors $E(X) \leq E(Y)$. c) Si X admet une espérance, alors $|X|$ aussi et $E(X) \leq E(|X|)$. (Question de cours).
- ☐ Existence d'une espérance par domination. (Question de cours).
- ☐ Soit g une fonction à valeurs réelles, et définie (au moins) sur $X(\Omega)$. Formule de transfert :

Si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X=x)$ converge absolument, alors $g(X)$ admet une espérance et

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X=x)$$

- ☐ Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.
- ☐ Si X^2 admet une espérance, alors on définit la variance $V(X) = E((X - E(X))^2)$. La variance est ainsi bien définie (Question de cours, démonstration exigible).
- ☐ Formule de Kœnig-Huygens.
- ☐ Variance d'une somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
- ☐ Loi de Poisson (connaître la formule explicite pour $P(X=k)$). Espérance, variance. (Question de cours, démonstration exigible pour l'espérance).
- ☐ Loi géométrique (connaître la formule explicite pour $P(X=k)$). Espérance, variance. (Question de cours, démonstration exigible pour l'espérance).
- ☐ Énoncer précisément le théorème de Poisson. Savoir s'en servir pour approximer des probabilités de lois binomiales, et pour justifier pourquoi certaines variables aléatoires sont modélisées par des variables de Poisson. (Question de cours)

Note pour les colleurs : on parlera d'ensemble des événements plutôt que de tribu, on admettra toujours que les ensembles considérés sont bien des événements.