Programme de colle 25

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), à préparer des questions à poser en classe, ou à prendre un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

Formules de Taylor, Développements limités

- ☐ Formule de Taylor reste-intégral pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle (Question de cours, démonstration exigible à l'ordre 1 puis 2 (pour simplifier).
- ☐ Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle (Question de cours, démonstration exigible en admettant la formule de Taylor reste-intégral).
- ☐ Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle (Question de cours, pas de démonstration exigible).
- ☐ Développements limités usuels : $e^x, \cos(x), \sin(x), (1+x)^\alpha$ (α réel), $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}, \ln(1+x)$. (Question de cours, donner le DL à l'ordre n de deux d'entre eux, et expliquer comment on peut le retrouver).
- ☐ Savoir vérifier la cohérence d'un DL : en regardant les deux premiers coefficients ($c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$) ; en vérifiant la parité/l'imparité du polynôme dans le cas d'un DL en 0, si jamais la fonction est paire/impaire.
- ☐ Déterminer un équivalent à l'aide d'un DL, y penser pour calculer des limites.
- ☐ Principe "absorbant" : un $o_{x\to 0}(x^i)$ "absorbe" tous les x^j et $o_{x\to 0}(x^j)$ pour $j > i$.
- ☐ Conséquence : savoir déduire d'un DL de f et un DL de g un DL de fg et $f+g$.
- ☐ Savoir se ramener à un DL en zéro pour déterminer un DL en a, soit en étudiant $f(a+h)$ puis en appliquant cela à $h = x-a$, soit directement en écrivant $f(x) = f(a+x-a)$ et en utilisant $x - a \underset{x\to a}{\to} 0$.
- ☐ Savoir étudier la position locale de la courbe représentative d'une fonction par rapport à sa tangente.
- ☐ Connaître une condition suffisante pour que x_0, un point critique d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$, soit un extremum local.
- ☐ Savoir déterminer une asymptote oblique à la courbe représentative de f en l'infini ainsi que la position relative de la courbe représentative de f par rapport à l'asymptote au voisinage de l'infini.

Projecteurs, applications linéaires en dimension finie

- ☐ Pour deux sous-espaces vectoriels F, G de E supplémentaires dans E, définition du projecteur sur F parallèlement à G.
- ☐ Si p est un projecteur, alors en notant F, G les sous-espaces vectoriels tels que p est un projecteur sur F parallèlement à G, on a $F = \mathrm{Im}(p)$, $G = \mathrm{Ker}(p)$. (Question de cours, démonstration exigible d'un des deux points).
- ☐ Caractérisation des projecteurs : soit $p \in \mathcal{L}(E)$, on a $p \circ p = p$ si, et seulement si, p est un projecteur. Dans ce cas, $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. (Question de cours, énoncer cette caractérisation, et au choix du colleur/colleuse, démonstration de $\Rightarrow$, ou $\Leftarrow$).
- ☐ Si p est un projecteur sur F parallèlement à G, alors $id_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F. Conséquence : $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(id_E - p)$.
- ☐ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E de dimension finie. L'image d'une base de E par f est :
  - une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ (et donc $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, inférieure ou égale à $\dim(E)$) ;
  - une famille libre si et seulement si f est injective,
  - une base de F si et seulement si f est bijective (et donc si f est bijective, $\dim(E) = \dim(F)$).

  (Question de cours, énoncer ces points et prouver un des trois points au choix du colleur/colleuse).
- ☐ Définition du rang d'une application linéaire.
- ☐ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E, F de dimension finie, on a $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$ et $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$. (Question de cours : énoncé et preuve des deux inégalités.)De plus on a $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ si et seulement si f injective, et $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$ si et seulement si f surjective.
- ☐ Théorème du rang. (Question de cours, l'énoncer précisément).

Note pour les colleurs : il n'y a pas encore eu d'applications ou d'exercices, en classe, avec le théorème du rang.