

## Programme de colle 25

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), à préparer des questions à poser en classe, ou à prendre un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

### Formules de Taylor, Développement limités

- Formule de Taylor reste-intégral pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle (Question de cours, démonstration exigible à l'ordre 1 puis 2 (pour simplifier)).
- Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle (Question de cours, démonstration exigible en admettant la formule de Taylor reste-intégral).
- Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle (Question de cours, pas de démonstration exigible).
- Développement limités usuels :  $e^x, \cos(x), \sin(x), (1+x)^\alpha$  ( $\alpha$  réel),  $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}, \ln(1+x)$ . (Question de cours, donner le DL à l'ordre  $n$  de deux d'entre eux, et expliquer comment on peut le retrouver).
- Savoir vérifier la cohérence d'un DL : en regardant les deux premiers coefficients ( $c_0 = f(a), c_1 = f'(a)$ ); en vérifiant la parité/l'imparité du polynôme dans le cas d'un DL en 0, si jamais la fonction est paire/impaire.
- Déterminer un équivalent à l'aide d'un DL, y penser pour calculer des limites.
- Principe "absorbant" : un  $o_{x \rightarrow 0}(x^i)$  "absorbe" tous les  $x^j$  et  $o_{x \rightarrow 0}(x^j)$  pour  $j > i$ .
- Conséquence : savoir déduire d'un DL de  $f$  et un DL de  $g$  un DL de  $fg$  et  $f+g$ .
- Savoir se ramener à un DL en zéro pour déterminer un DL en  $a$ , soit en étudiant  $f(a+h)$  puis en appliquant cela à  $h = x - a$ , soit directement en écrivant  $f(x) = f(a + x - a)$  et en utilisant  $x - a \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .
- Savoir étudier la position locale de la courbe représentative d'une fonction par rapport à sa tangente.
- Connaître une condition suffisante pour que  $x_0$ , un point critique d'une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , soit un extremum local.
- Savoir déterminer une asymptote oblique à la courbe représentative de  $f$  en l'infini ainsi que la position relative de la courbe représentative de  $f$  par rapport à l'asymptote au voisinage de l'infini.

### Projecteurs, applications linéaires en dimension finie : la présentation n'est pas la même en EC1B et EC1A

---

#### En EC1A :

- Pour deux sous-espaces vectoriels  $F, G$  de  $E$  supplémentaires dans  $E$ , définition du projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .
- Si  $p$  est un projecteur, alors en notant  $F, G$  les sous-espaces vectoriels tels que  $p$  est un projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ , on a  $F = \text{Im}(p), G = \text{Ker}(p)$ . (Question de cours, démonstration exigible d'un des deux points).
- Caractérisation des projecteurs : soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ , on a  $p \circ p = p$  si, et seulement si,  $p$  est un projecteur. Dans ce cas,  $\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$  et  $p$  est le projecteur sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ . (Question de cours, énoncer cette caractérisation, et au choix du colleur/colleuse, démonstration de  $\Rightarrow$ , ou  $\Leftarrow$ ).

#### En EC1B :

- Pour deux sous-espaces vectoriels  $F, G$  de  $E$  supplémentaires dans  $E$ , définition de la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .
- Définition d'un projecteur : un endomorphisme tel que  $p \circ p = p$
- Si  $p$  est une projection, alors en notant  $F, G$  les sous-espaces vectoriels tels que  $p$  est une projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ , on a  $F = \text{Im}(p), G = \text{Ker}(p)$ . (Question de cours, démonstration exigible d'un des deux points).
- Caractérisation des projections : soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ , on a  $p \circ p = p$  si, et seulement si,  $p$  est une projection. Dans ce cas,  $\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$  et  $p$  est la projection sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ . (Question de cours, énoncer cette caractérisation, et au choix du colleur/colleuse, démonstration de  $\Rightarrow$ , ou  $\Leftarrow$ ).

- 
- Si  $p$  est un projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ , alors  $\text{id}_E - p$  est le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$ . Conséquence :  $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{id}_E - p)$ .
  - Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , avec  $E$  de dimension finie. L'image d'une base de  $E$  par  $f$  est :

- une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$  (et donc  $\text{Im}(f)$  est de dimension finie, inférieure ou égale à  $\dim(E)$ );
- une famille libre si et seulement si  $f$  est injective,
- une base de  $F$  si et seulement si  $f$  est bijective (et donc si  $f$  est bijective,  $\dim(E) = \dim(F)$ ).

(Question de cours, énoncer ces points et prouver un des trois points au choix du colleur/colleuse).

- Définition du rang d'une application linéaire.
- Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , avec  $E, F$  de dimension finie, on a  $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$  et  $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$ . (Question de cours : énoncé et preuve des deux inégalités.) De plus on a  $\text{rg}(f) = \dim(E)$  si et seulement si  $f$  injective, et  $\text{rg}(f) = \dim(F)$  si et seulement si  $f$  surjective.
- Théorème du rang. (Question de cours, l'énoncer précisément).
- Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , on suppose  $E, F$  de dimension finie et  $\dim(E) = \dim(F)$ . Il suffit de montrer que  $f$  est injective OU surjective, pour montrer que  $f$  est bijective. (Question de cours, énoncer ce résultat sous forme d'équivalences, démonstration d'une des implications).
- Rappel et propriétés du rang d'une application linéaire ou d'une famille de vecteurs (démonstrations exigibles) :
  - $f$  injective ssi  $\text{Rg}(f) = \dots$
  - $f$  surjective ssi  $\text{Rg}(f) = \dots$
  - $f$  bijective ssi son  $\text{Rg}(f) = \dots$
- Un s.e.v. d'un espace vectoriel de dimension finie est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle (Question de cours, énoncer ce résultat, démonstration d'une des implications).

## Représentation matricielle des applications linéaires et des vecteurs en dimension finie

- Définition de  $\text{Mat}_B(x)$  où  $x$  est un vecteur de  $E$ , de  $\text{Mat}_B(x_1, \dots, x_p)$  où  $(x_1, \dots, x_p)$  est une famille de vecteurs de  $E$  (en EC1B), de  $\text{Mat}_{C,B}(f)$  où  $f : E \rightarrow F$ ,  $B$  base de  $E$ ,  $C$  base de  $F$ .
- En EC1B : une famille de vecteurs  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre si et seulement si  $\text{Ker}(\text{Mat}_B(x_1, \dots, x_p)) = \{0\}$  si et seulement si les vecteurs colonnes de la matrice forment une famille libre (Question de cours, démonstration exigible).
- En EC1B : une famille de vecteurs  $(x_1, \dots, x_p)$  de  $E$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\text{Mat}_B(x_1, \dots, x_p)$  est une matrice inversible. (Question de cours, démonstration exigible).
- $\text{Mat}_C(f(x)) = \text{Mat}_{C,B}(f)\text{Mat}_B(x)$  (Question de cours, démonstration exigible).
- $\text{Mat}_{D,B}(g \circ f) = \text{Mat}_{D,C}(g)\text{Mat}_{C,B}(f)$  (Question de cours, démonstration exigible).
- $\text{Mat}_B$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $\mathcal{M}_{\dim(E),1}(\mathbb{R})$  et  $\text{Mat}_{C,B}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{L}(E, F)$  dans  $\mathcal{M}_{\dim(F),\dim(E)}(\mathbb{R})$ .
- Conséquences des propriétés précédentes :
  - $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$
  - Si  $f$  est un endomorphisme, matrice de  $f^k$ , un polynôme est annulateur de  $f$  ssi il est annulateur de la matrice de  $f$ .
  - Si  $f : E \rightarrow F$  avec  $\dim(E) = \dim(F)$ ,  $f$  est inversible ssi  $\text{Mat}_{C,B}(f)$  est inversible, et dans ce cas  $\text{Mat}_{B,C}(f^{-1}) = \text{Mat}_{C,B}(f)$ .
- Notions d'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Notions de matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  :  $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id_E)$ .  
Comment déterminer les coordonnées d'un vecteur dans la base  $\mathcal{C}$  à partir des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  à l'aide de cette matrice ?
- Bijection (par passage aux coordonnées) entre le noyau de  $f$  et le noyau de la matrice  $\text{Mat}_{C,B}(f)$ . Bijection (par passage aux coordonnées) entre l'image de  $f$  et l'image de la matrice  $\text{Mat}_{C,B}(f)$ . En conséquence, le rang de  $f$  est le rang de  $\text{Mat}_{C,B}(f)$ .
- Définition du noyau et de l'image d'une matrice.
- Définition du rang d'une matrice.
- Le rang d'une famille de vecteurs de  $E$  est le rang d'une matrice de ces vecteurs.
- Calcul pratique du rang d'une matrice : propriété  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$ , conséquences : opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes qui ne changent pas le rang. Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de pivots.
- Théorème du rang pour les matrices.
- Une matrice carrée est inversible si et seulement si son rang est égal à sa taille (Question de cours, démonstration exigible).