

## Programme de colle 25

---

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), à préparer des questions à poser en classe, ou à prendre un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

### Projecteurs, applications linéaires en dimension finie : la présentation n'est pas la même en EC1B et EC1A

---

#### En EC1A :

- Pour deux sous-espaces vectoriels  $F, G$  de  $E$  supplémentaires dans  $E$ , définition du projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .
- Si  $p$  est un projecteur, alors en notant  $F, G$  les sous-espaces vectoriels tels que  $p$  est un projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ , on a  $F = \text{Im}(p)$ ,  $G = \text{Ker}(p)$ . (Question de cours, démonstration exigible d'un des deux points).
- Caractérisation des projecteurs : soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ , on a  $p \circ p = p$  si, et seulement si,  $p$  est un projecteur. Dans ce cas,  $\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$  et  $p$  est le projecteur sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ . (Question de cours, énoncer cette caractérisation, et au choix du colleur/colleuse, démonstration de  $\Rightarrow$ , ou  $\Leftarrow$ ).

#### En EC1B :

- Pour deux sous-espaces vectoriels  $F, G$  de  $E$  supplémentaires dans  $E$ , définition de la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .
- Définition d'un projecteur : un endomorphisme tel que  $p \circ p = p$
- Si  $p$  est une projection, alors en notant  $F, G$  les sous-espaces vectoriels tels que  $p$  est une projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ , on a  $F = \text{Im}(p)$ ,  $G = \text{Ker}(p)$ . (Question de cours, démonstration exigible d'un des deux points).
- Caractérisation des projections : soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ , on a  $p \circ p = p$  si, et seulement si,  $p$  est une projection. Dans ce cas,  $\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$  et  $p$  est la projection sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ . (Question de cours, énoncer cette caractérisation, et au choix du colleur/colleuse, démonstration de  $\Rightarrow$ , ou  $\Leftarrow$ ).

- 
- Si  $p$  est un projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ , alors  $\text{id}_E - p$  est le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$ . Conséquence :  $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{id}_E - p)$ .
  - Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , avec  $E$  de dimension finie. L'image d'une base de  $E$  par  $f$  est :
    - une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$  (et donc  $\text{Im}(f)$  est de dimension finie, inférieure ou égale à  $\dim(E)$ );
    - une famille libre si et seulement si  $f$  est injective,
    - une base de  $F$  si et seulement si  $f$  est bijective (et donc si  $f$  est bijective,  $\dim(E) = \dim(F)$ ).(Question de cours, énoncer ces points et prouver un des trois points au choix du colleur/colleuse).
  - Définition du rang d'une application linéaire.
  - Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , avec  $E, F$  de dimension finie, on a  $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$  et  $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$ . (Question de cours : énoncé et preuve des deux inégalités.) De plus on a  $\text{rg}(f) = \dim(E)$  si et seulement si  $f$  injective, et  $\text{rg}(f) = \dim(F)$  si et seulement si  $f$  surjective.
  - Théorème du rang. (Question de cours, l'énoncer précisément).
  - Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , on suppose  $E, F$  de dimension finie et  $\dim(E) = \dim(F)$ . Il suffit de montrer que  $f$  est injective OU surjective, pour montrer que  $f$  est bijective. (Question de cours, énoncer ce résultat sous forme d'équivalences, démonstration d'une des implications).
  - Rappel et propriétés du rang d'une application linéaire ou d'une famille de vecteurs (démonstrations exigibles) :
    - $f$  injective ssi  $\text{Rg}(f) = \dots$
    - $f$  surjective ssi  $\text{Rg}(f) = \dots$
    - $f$  bijective ssi son  $\text{Rg}(f) = \dots$
  - Un s.e.v. d'un espace vectoriel de dimension finie est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle (Question de cours, énoncer ce résultat, démonstration d'une des implications).

# Représentation matricielle des applications linéaires et des vecteurs en dimension finie

- Définition de  $Mat_B(x)$  où  $x$  est un vecteur de  $E$ , de  $Mat_B(x_1, \dots, x_p)$  où  $(x_1, \dots, x_p)$  est une famille de vecteurs de  $E$  (en EC1B), de  $Mat_{C,B}(f)$  où  $f : E \rightarrow F$ ,  $B$  base de  $E$ ,  $C$  base de  $F$ .
- En EC1B : une famille de vecteurs  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre si et seulement si  $\text{Ker}(Mat_B(x_1, \dots, x_p)) = \{0\}$  si et seulement si les vecteurs colonnes de la matrice forment une famille libre ([Question de cours, démonstration exigible](#)).
- En EC1B : une famille de vecteurs  $(x_1, \dots, x_p)$  de  $E$  est une base de  $E$  si et seulement si  $Mat_B(x_1, \dots, x_p)$  est une matrice inversible. ([Question de cours, démonstration exigible](#)).
- $Mat_C(f(x)) = Mat_{C,B}(f)Mat_B(x)$  ([Question de cours, démonstration exigible](#)).
- $Mat_{D,B}(g \circ f) = Mat_{D,C}(g)Mat_{C,B}(f)$  ([Question de cours, démonstration exigible](#)).
- $Mat_B$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $\mathcal{M}_{\dim(E),1}(\mathbb{R})$  et  $Mat_{C,B}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{L}(E, F)$  dans  $\mathcal{M}_{\dim(F), \dim(E)}(\mathbb{R})$ .
- Conséquences des propriétés précédentes :
  - $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$
  - Si  $f$  est un endomorphisme, matrice de  $f^k$ , un polynôme est annulateur de  $f$  ssi il est annulateur de la matrice de  $f$ .
  - Si  $f : E \rightarrow F$  avec  $\dim(E) = \dim(F)$ ,  $f$  est inversible ssi  $Mat_{C,B}(f)$  est inversible, et dans ce cas  $Mat_{B,C}(f^{-1}) = Mat_{C,B}(f)$ .
- Notions d'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Notions de matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  :  $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id_E)$ .  
Comment déterminer les coordonnées d'un vecteur dans la base  $\mathcal{C}$  à partir des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  à l'aide de cette matrice ?
- Bijection (par passage aux coordonnées) entre le noyau de  $f$  et le noyau de la matrice  $Mat_{C,B}(f)$ . Bijection (par passage aux coordonnées) entre l'image de  $f$  et l'image de la matrice  $Mat_{C,B}(f)$ . En conséquence, le rang de  $f$  est le rang de  $Mat_{C,B}(f)$ .
- Définition du noyau et de l'image d'une matrice.
- Définition du rang d'une matrice.
- Le rang d'une famille de vecteurs de  $E$  est le rang d'une matrice de ces vecteurs.
- Calcul pratique du rang d'une matrice : propriété  $rg(A) = rg(A^t)$ , conséquences : opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes qui ne changent pas le rang. Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de pivots.
- Théorème du rang pour les matrices.
- Une matrice carrée est inversible si et seulement si son rang est égal à sa taille ([Question de cours, démonstration exigible](#)).

## 1 Intégrales généralisées

### Notion d'intégrale généralisée (ou d'intégrale impropre)

- **Cas d'une impropreté** on considère  $f : [a, b[$  continue (impropreté en  $b$ ).
  - Pour  $f$  continue sur  $[a, b[$ , définition de  $\int_a^b f(t) dt$  converge. Sinon on dit que l'intégrale diverge.
  - Définition similaire pour  $f$  continue sur  $]a, b]$ .
  - Cas particulier de convergence pour  $b$  fini :  
convergence de  $\int_a^b f(t) dt$  quand  $f$  admet une limite finie en  $b$  (c'est-à-dire  $f$  prolongeable continuellement en  $b$ ) ([Démonstration à connaître](#))
  - Cas particulier de divergence pour  $b = +\infty$  (ou  $a = -\infty$ ) :  
si  $f$  admet une limite non nulle en  $b = +\infty$  (ou en  $a = -\infty$ ) alors  $\int_a^b f(t) dt$  diverge.  
 $\triangle$  Ce n'est pas parce que  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  que  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge : savoir donner un contre exemple.  
 $\triangle$  Ce n'est pas parce que  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge que  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  : la fonction  $f$  peut ne pas admettre de limite.
- **Cas d'impropretés aux deux bornes** :  $f$  continue sur  $]a, b[$ .
  - On dit que  $\int_a^b f(t) dt$  converge lorsqu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\int_a^c f(t) dt$  et  $\int_c^b f(t) dt$  convergent.  
*Cela revient à l'étude de deux intégrales impropres qui n'ont chacune qu'une impropreté.*

□ La définition précédente est équivalente à : "pour tout  $c \in ]a, b[$ ,  $\int_a^c f(t) dt$  et  $\int_c^b f(t) dt$  convergent."  
*Comprendre que cela vient de la relation de Chasles.*

□ La définition précédente est équivalente à "il existe  $(c, c') \in ]a, b[$  tel que  $\int_a^c f(t) dt$  et  $\int_{c'}^b f(t) dt$  converge.  
*Comprendre que cela vient de la relation de Chasles.*

• **Cas d'improprietés multiples entre les bornes de l'intégrale**

□ Connaître la définition et savoir étudier ce genre d'intégrales.

*On découpe l'intervalle en intervalles ouverts avec des improprietés seulement aux bornes de ces intervalles*

**Propriétés de signes et calculs sur les intégrales impropres**

• **Intégrales impropres et inégalités**

△ Pour les trois propriétés suivantes il est nécessaire d'avoir prouvé au préalable la convergence des intégrales : en effet  $\int_a^b f(t) dt$  n'est un réel bien défini que si l'intégrale est convergente, sinon écrire  $\int_a^b f(t) dt = \dots$  ou  $\geq \dots$  n'a aucun sens.

□ Positivité. Cas d'égalité pour la positivité. *Savoir penser à la contraposée du cas d'égalité : si  $f$  (positive) n'est pas identiquement nulle, l'intégrale n'est pas nulle*

□ Savoir déduire de la positivité la propriété de croissance de l'intégrale.

□ Savoir déduire de la positivité et du cas d'égalité de la positivité la stricte croissance de l'intégrale : si pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f(t) \leq g(t)$ , qu'il existe  $t \in ]a, b[$  tel que  $f(t) \neq g(t)$  et que les intégrales convergent, alors  $\int_a^b f(t) dt < \int_a^b g(t) dt$ .

• **Des propriétés de calcul qui donnent la convergence d'intégrales et potentiellement leurs valeurs**

□ Inégalité triangulaire : △ Nécessite la convergence absolue de l'intégrale.

★ La convergence absolue implique la convergence.

*Permet de se ramener à l'étude de la convergence de l'intégrale d'une fonction positive.*

□ Linéarité sur les intégrales impropres : Si  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  convergent, alors  $\int_a^b \lambda f(t) + g(t) dt$  converge et vaut  $\dots$  △ Bien vérifier la convergence des intégrales de  $f$  et  $g$ .

*Remarquer qu'un des résultats de la linéarité est de donner la convergence de  $\int_a^b \lambda f(t) + g(t) dt$ , si on sait que  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  convergent*

□ Relation de Chasles : Si  $\int_a^c f(t) dt$  et  $\int_c^b f(t) dt$  convergent, alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge et vaut  $\dots$

□ Une conséquence de la relation de Chasles : Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors pour tout  $c \in [a, b]$ ,  $\int_a^c f(t) dt$  et  $\int_c^b f(t) dt$  ont même nature. (Démonstration à connaître).

□ Changement de variables : les intégrales sont de même nature.

△ Attention à vérifier que l'une des deux converge avant d'écrire qu'elles sont égales. Le changement de variable garantit en effet que si les intégrales convergent (il suffit de vérifier une des deux car elles ont même nature), alors elles sont égales, mais on ne saurait écrire des égalités entre des nombres réels qui ne sont pas bien définis.

□ Intégration par parties : △ il n'y a pas de théorèmes spécifiques, il faut se ramener à un segment sur lequel la fonction est continue, faire l'IPP comme au premier chapitre sur les intégrales puis faire tendre les bornes.

• **Dérivées par rapport à une borne**

★ Pour une improprieté en  $b$  et tel que  $\int_a^b f(t) dt$  converge : savoir prouver la dérivabilité et calculer la dérivée de  $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ .

★ Pour une improprieté en  $a$  et tel que  $\int_a^b f(t) dt$  converge : savoir prouver la dérivabilité et calculer la dérivée de  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ .

*Ce qui se fait à l'aide de la relation de Chasles et du théorème fondamental de l'analyse.*

**Fonctions positives et critères de comparaison**

• **Un critère fondamental : (Démonstration à connaître).**

- Pour  $f$  continue et **positive** sur  $[a, b]$ ,  $\int_a^b f(t) dt$  converge si et seulement si  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est majorée.
- Pour  $f$  continue et **positive** sur  $[a, b]$ ,  $\int_a^b f(t) dt$  converge si et seulement si  $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$  est majorée.

• **Des critères de comparaison :**

Les critères sont donnés ici pour  $f$  continue sur  $[a, b]$ , c'est à dire que  $\int_a^b f(t) dt$  a UNE improprieté en  $b$  (critères similaires si l'improprieté est en  $a$ , mais attention ces critères sont pour UNE improprieté, s'il y en a plusieurs penser à découper l'intégrale en intégrales ayant chacune une improprieté).

- Si, au voisinage de  $b$ ,  $0 \leq f(t) \leq g(t)$ , et que  $\int_a^b g(t) dt$  converge, alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge.
- Si  $g$  est positive (a minima au voisinage de  $b$ ), et que  $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$ , alors  $\int_a^b g(t) dt$  et  $\int_a^b f(t) dt$  sont de même nature.
- Si  $g$  est positive (a minima au voisinage de  $b$ ), que  $f(t) = \underset{t \rightarrow b}{o}(g(t))$  et que  $\int_a^b g(t) dt$  converge, alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge.

## Intégrales impropres de références

• **Critère de Riemann** ([Démonstration à connaître](#)). Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$
- $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$
- $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$

*Cas particulier important pour  $a = 0, b = 1$  :  $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$*

• **Intégrale d'exponentielle** ([Démonstration à connaître](#)). Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$  converge ssi  $\lambda > 0$ . Dans ce cas connaître sa valeur.