Programme de colle 4

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous.

TOUT LE PROGRAMME DE LA SEMAINE PRECEDENTE, ET :

Applications (chapitre complet)

- Définitions :
  - ☐ Définition d'une fonction (l'ensemble de départ et d'arrivée font partie de la définition de la fonction)
  - ☐ Définition de l'image directe d'un ensemble avec des quantificateurs (en extension et en compréhension), savoir l'expliquer en bon français.
  - ☐ Définition de l'image réciproque d'un ensemble avec des quantificateurs (en compréhension), savoir l'expliquer en bon français.
  - ☐ Définition de la composée $f \circ g$, savoir (et pouvoir expliquer) la condition pour que cela ait un sens : $\mathrm{Im}(g) \subset$ (ensemble de départ de f).
  - ☐ Avoir compris pourquoi la composition $\circ$ est associative (on ne demandera pas la démonstration).
  - ☐ Notion de prolongement et de restriction d'une application : savoir donner quelques exemples de prolongements, et la restriction à un domaine donné, sur des exemples simples.
- Surjections :
  - ☐ Définition d'une fonction surjective comme condition sur l'ensemble image, définition avec des quantificateurs, et savoir expliquer ces deux définitions en français.(Question de cours)
  - ☐ Savoir montrer qu'une fonction est surjective (ou pas !) sur un exemple simple. Dans le cas où la fonction est réelle continue, on pourra utiliser un tableau de variations.
- Injections :
  - ☐ Définition d'une fonction injective avec des quantificateurs, et savoir l'expliquer en français.(Question de cours)
  - ☐ Savoir montrer qu'une fonction est injective (ou pas !) sur un exemple simple. Dans le cas où la fonction est réelle continue, on pourra utiliser un tableau de variations.
  - ☐ Savoir donner des exemples de fonctions injectives ou non et surjectives ou non (donc quatre possibilités, tout est possible).
- Bijections :
  - ☐ Définition d'une fonction bijective comme une fonction injective et surjective, ou bien avec des quantificateurs, et savoir l'expliquer en français. (Question de cours)
  - ☐ Savoir montrer qu'une fonction est bijective (ou pas !) sur un exemple simple. Dans le cas où la fonction est réelle continue, on pourra utiliser un tableau de variations.
  - ☐ Théorème de la bijection strictement monotone continue (avoir compris que $f : I \to \mathbb{R}$ n'est pas forcément une bijection, le théorème dit que $f : I \to f(I)$ est une bijection). (Question de cours, l'énoncé précis du théorème entier et la démonstration uniquement de : f strictement monotone continue sur un intervalle I implique $f : I \to f(I)$ bijective)
  - ☐ $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_g$ (Question de cours, l'énoncer précisément, avec la démonstration).
  - ☐ Réciproque d'une composée de deux bijections (Question de cours, avec la démonstration)
  - ☐ Savoir déterminer l'expression d'une réciproque dans des exemples simples.
  - ☐ Savoir tracer une fonction bijective d'un ensemble discret dans un autre (diagrammes) ou de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et dans ce cas avoir compris que le graphe de la fonction réciproque est obtenu par symétrie par la droite d'équation $y = x$.

Suites

Généralités

- ☐ Notation : faire la différence entre le terme de rang n : u_n et la suite notée u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).
- ☐ Dans le cas d'une définition par récurrence savoir faire un changement d'indice dans la formule de récurrence et savoir pour quels n est valable votre formule (par exemple, si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1}+2u_n$, alors pour pour tout $n \geq 2$, $u_n = u_{n-1}+2u_{n-2}$).
- ☐ Expression "à partir d'un certain rang", par exemple "à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ signifie : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq v_n$.

☐ Définition de suite majorée, minorée et bornée.

☐ Propriété : (u_n) est bornée si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq A$ (démonstration exigible).

☐ Définition de suites (strictement) croissantes, décroissantes, monotones, constantes, stationnaires.

Limites

- Suites convergentes
  - ☐ Définition de suite convergente : savoir énoncer précisément et représenter la définition sur un dessin.
  - ☐ Unicité de la limite dans le cas convergent (autrement dit, si on a $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$, alors $\ell = \ell'$). (Question de cours : démonstration exigible)
  - ☐ $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Leftrightarrow |u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  - ☐ Toute suite réelle convergente est bornée.
- Suites divergentes
  - ☐ Définition de suite divergente, de suite divergente vers $+\infty$ et de suite divergente vers $-\infty$.
  - ☐ Connaître des exemples de suites divergentes qui ne tendent pas vers $+\infty$ ou $-\infty$. Savoir en dessiner.
  - ☐ Connaître des exemples de suites divergentes vers $+\infty$ qui ne sont pas croissantes, même à partir d'un certain rang. Savoir en dessiner.

☐ Limites des suites usuelles.

- Opérations sur les limites
  - ☐ Connaître et comprendre les règles d'addition. Bien repérer les formes indéterminées.
  - ☐ Connaître et comprendre les règles de multiplication. Bien repérer les formes indéterminées.
  - ☐ Connaître et comprendre les règles du quotient. Bien repérer les formes indéterminées.
    Bien comprendre les différents cas quand la suite au dénominateur tend vers 0.

⋆ Composition de limites
  - ☐ Connaître le théorème (appelé aussi propriété) de composition des limites. (Question de cours, l'énoncer précisément)
  - ☐ Savoir démontrer, à l'aide de la composition des limites, que si f est continue en un réel ℓ, et que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\ell)$. (Question de cours)
  - ☐ Limites de type taux de variation à connaître : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, limites de $\dfrac{\sin(u_n)}{u_n}$, $\dfrac{\ln\left(1+u_n\right)}{u_n}$, $\dfrac{\sqrt{1+u_n}-1}{u_n}$, $\dfrac{e^{u_n}-1}{u_n}$. (Question de cours : calculer une de ces limites, tout bien justifier à l'aide de la définition de la dérivée comme la limite du taux de variation et la composition des limites.)

- Limites et inégalités

☐ Théorème de convergence monotone.

☐ Si (u_n) converge vers $l > 0$ alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$. (Question de cours : démonstration exigible)

☐ La propriété se généralise : si (u_n) converge vers $m < \ell < M$ alors à partir d'un certain rang $m < u_n < M$. A savoir démontrer. Idée : appliquer la propriété précédente aux suites $(u_n - m)$ et $(M - u_n)$...

☐ Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' et que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang alors $\ell \leq \ell'$. (Question de cours : démonstration exigible)

Attention 1 Ne pas inventer le théorème (faux) suivant :
~~Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' et que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang alors $\ell < \ell'$~~. Savoir pourquoi c'est faux (quel contre-exemple ?). En revanche, si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' et que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang alors $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et donc $\ell \leq \ell'$.

Attention 2 pour appliquer le théorème il faut que les suites u et v soient convergentes...

☐ Théorème de comparaison (Question de cours : démonstration exigible)

☐ Théorème des gendarmes.

☐ Connaître ses croissances comparées.

- Décalage d'indice : Si la suite (u_n) admet une limite, alors la suite (u_{n+1}) admet aussi cette même limite... (et réciproquement, si (u_{n+1}) admet une limite, (u_n) admet aussi cette même limite).

Suites particulières

- Suites arithmétiques
  - ☐ Formule par récurrence. Attention la raison ne doit pas dépendre de n...
  - ☐ Formule explicite en fonction de n (savoir la déterminer quand le premier terme de la suite n'est pas de rang 0).
  - ☐ Formule de la somme

- Suites géométriques
  - ☐ Formule par récurrence. Attention la raison ne doit pas dépendre de n...
  - ☐ Formule explicite en fonction de n (savoir la déterminer quand le premier terme de la suite n'est pas de rang 0).
  - ☐ Formule de la somme
- Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$. **La méthode générale d'étude n'est pas à connaître et le fameux théorème du point fixe n'est pas au programme et ne doit pas être cité**.
  - ☐ Savoir tracer graphiquement les termes successifs de (u_n) à l'aide du tracé de $y = x$ et de la courbe représentative de f.
  - ☐ Avoir bien compris et avoir vu sur des exemples que ce n'est pas parce que f est croissante que (u_n) l'est ou parce que f est décroissante que (u_n) l'est.
  - ☐ Dans le cas où la suite converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, et que f est continue en ℓ (bien connaître l'hypothèse ! pourquoi est-ce essentiel ?), savoir prouver que $\ell = f(\ell)$.

Note pour les colleurs : Ne pas encore interroger sur les suites adjacentes, ni les suites extraites (indices pairs/impairs), ni les les suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Nous n'avons pas encore revu en classe les suites arithmético-géométriques