Programme de colle 6

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous.

Suites (comme la semaine précédente)

Généralités

- ☐ Notation : faire la différence entre le terme de rang n : u_n et la suite notée u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).
- ☐ Dans le cas d'une définition par récurrence savoir faire un changement d'indice dans la formule de récurrence et savoir pour quels n est valable votre formule (par exemple, si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1}+2u_n$, alors pour pour tout $n \geq 2$, $u_n = u_{n-1}+2u_{n-2}$).
- ☐ Expression "à partir d'un certain rang", par exemple "à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ signifie : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq v_n$.
- ☐ Définition de suite majorée, minorée et bornée.
- ☐ Propriété : (u_n) est bornée si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq A$ (démonstration exigible).
- ☐ Définition de suites (strictement) croissantes, décroissantes, monotones, constantes, stationnaires.

Limites

- Suites convergentes
  - ☐ Définition de suite convergente : savoir énoncer précisément et représenter la définition sur un dessin.
  - ☐ Unicité de la limite dans le cas convergent (autrement dit, si on a $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$, alors $\ell = \ell'$). (Question de cours : démonstration exigible)
  - ☐ $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Leftrightarrow |u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  - ☐ Toute suite réelle convergente est bornée.
- Suites divergentes
  - ☐ Définition de suite divergente, de suite divergente vers $+\infty$ et de suite divergente vers $-\infty$.
  - ☐ Connaître des exemples de suites divergentes qui ne tendent pas vers $+\infty$ ou $-\infty$. Savoir en dessiner.
  - ☐ Connaître des exemples de suites divergentes vers $+\infty$ qui ne sont pas croissantes, même à partir d'un certain rang. Savoir en dessiner.
- ☐ Limites des suites usuelles.
- Opérations sur les limites
  - ☐ Connaître et comprendre les règles d'addition. Bien repérer les formes indéterminées.
  - ☐ Connaître et comprendre les règles de multiplication. Bien repérer les formes indéterminées.
  - ☐ Connaître et comprendre les règles du quotient. Bien repérer les formes indéterminées.
    Bien comprendre les différents cas quand la suite au dénominateur tend vers 0.
- ⋆ Composition de limites
  - ☐ Connaître le théorème (appelé aussi propriété) de composition des limites. (Question de cours, l'énoncer précisément)
  - ☐ Savoir démontrer, à l'aide de la composition des limites, que si f est continue en un réel ℓ, et que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\ell)$. (Question de cours)
  - ☐ Limites de type taux de variation à connaître : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, limites de $\dfrac{\sin(u_n)}{u_n}$, $\dfrac{\ln\left(1+u_n\right)}{u_n}$, $\dfrac{\sqrt{1+u_n}-1}{u_n}$, $\dfrac{e^{u_n}-1}{u_n}$. (Question de cours : calculer une de ces limites, tout bien justifier à l'aide de la définition de la dérivée comme la limite du taux de variation et la composition des limites.)
- Limites et inégalités
- ☐ Théorème de convergence monotone.
- ☐ Si (u_n) converge vers $l > 0$ alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$. (Question de cours : démonstration exigible)
- ☐ La propriété se généralise : si (u_n) converge vers $m < \ell < M$ alors à partir d'un certain rang $m < u_n < M$. A savoir démontrer. Idée : appliquer la propriété précédente aux suites $(u_n - m)$ et $(M - u_n)$...
- ☐ Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' et que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang alors $\ell \leq \ell'$. (Question de cours : démonstration exigible)

  Attention 1 Ne pas inventer le théorème (faux) suivant :
  ~~Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' et que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang alors $\ell < \ell'$~~. Savoir pourquoi c'est faux (quel contre-exemple ?). En revanche, si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' et que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang alors $u_n \leq v_n$

à partir d'un certain rang et donc $\ell \leq \ell'$.

Attention 2 pour appliquer le théorème il faut que les suites u et v soient convergentes...

- ☐ Théorème de comparaison (Question de cours : démonstration exigible)
- ☐ Théorème des gendarmes.
- ☐ Connaître ses croissances comparées.
- Suites adjacentes : définition, théorème si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite (Question de cours : démonstration exigible)
- Décalage d'indice : Si la suite (u_n) admet une limite, alors la suite (u_{n+1}) admet aussi cette même limite... (et réciproquement, si (u_{n+1}) admet une limite, (u_n) admet aussi cette même limite).
- Théorème : Soit $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ si et seulement si $u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

Suites particulières

- Suites arithmétiques
  - ☐ Formule par récurrence. Attention la raison ne doit pas dépendre de n...
  - ☐ Formule explicite en fonction de n (savoir la déterminer quand le premier terme de la suite n'est pas de rang 0).
  - ☐ Formule de la somme
- Suites géométriques
  - ☐ Formule par récurrence. Attention la raison ne doit pas dépendre de n...
  - ☐ Formule explicite en fonction de n (savoir la déterminer quand le premier terme de la suite n'est pas de rang 0).
  - ☐ Formule de la somme
- Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$. **La méthode générale d'étude n'est pas à connaître et le fameux théorème du point fixe n'est pas au programme et ne doit pas être cité**.
  - ☐ Savoir tracer graphiquement les termes successifs de (u_n) à l'aide du tracé de $y = x$ et de la courbe représentative de f.
  - ☐ Avoir bien compris et avoir vu sur des exemples que ce n'est pas parce que f est croissante que (u_n) l'est ou parce que f est décroissante que (u_n) l'est.
  - ☐ Dans le cas où la suite converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, et que f est continue en ℓ (bien connaître l'hypothèse ! pourquoi est-ce essentiel ?), savoir prouver que $\ell = f(\ell)$.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (il existe deux constantes a, b, pour tous $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Théorème (admis) donnant l'expression explicite de u_n dans le cas où le polynôme caractéristique a au moins une solution.
- Suites arithmético-géométriques : maîtriser la méthode pour déterminer l'expression explicite.

Polynômes

Opérations sur les polynômes

- ☐ Convention d'écriture : $X^2 + 1$, par exemple, désigne la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2 + 1$.
- ☐ Degré de λP en fonction de λ et du degré de P.
- ☐ Degré d'une somme de deux polynômes, d'un produit de deux polynômes, d'une composée de deux polynômes. (Question de cours, et prouver la formule pour le degré de la somme.)
- ☐ Formule donnant les coefficients d'un produit de deux polynômes. (Question de cours, sans démonstration exigible, mais savoir au moins le vérifier sur un cas concret avec de petits degrés.)
- ☐ Comprendre que l'on n'a pas la propriété d'intégrité pour toutes les fonctions, mais que l'on a la propriété d'intégrité pour les polynômes.
- ☐ Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, savoir démontrer que $P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}X^k$, puis en déduire plus généralement la formule pour $P^{(i)}$ pour tout $i \leq n$. En déduire $P^{(i)}(0)$. (Question de cours)
- ☐ Énoncer précisément les formules de Taylor (celle en 0, et celle plus générale en $\alpha \in \mathbb{R}$). (Question de cours, sans démonstration)
- ☐ Formule de Leibniz.

Divisibilité, division euclidienne

- ☐ Définition de B divise A, propriété : si A non nul et que B divise A, alors, $\deg(B) \leq \deg(A)$ (Question de cours en EC1A avec démonstration exigible)
- ☐ Définition du reste et du quotient de la division euclidienne de A par $B \neq 0$. (Question de cours)
- ☐ Savoir poser et effectuer à la main la division euclidienne.
- ☐ Méthode pour trouver le reste R en évaluant la relation $A = BQ + R$ en des racines de B.

Racines

- ☐ $X - \alpha$ divise P si et seulement si $P(\alpha) = 0$ (Question de cours, démonstration exigible)
- ☐ Si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des racines de P deux à deux distinctes, alors $(X - \alpha_1) \times \cdots \times (X - \alpha_r)$ divise P. Conséquence : si P est non nul, le nombre de racines de P est inférieur ou égal à $\deg(P)$.
- ☐ Conséquence : si un polynôme P admet une infinité de racines, alors $P = 0$.
- ☐ Trois définitions équivalentes, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, de "α est racine de P de multiplicité m" : i) $(X - \alpha)^m$ divise P mais $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas P ; ii) il existe un polynôme Q tel que $P = (X-\alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$; iii) $P(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$. (En EC1B, l'équivalence avec iii) est vu comme une propriété). (Question de cours, donner précisément ces trois conditions équivalentes, sans démonstration)
- ☐ Si $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ sont des racines de P deux à deux distinctes de multiplicités $m_1, m_2, \dots, m_r$, $(X - \alpha_1)^{m_1} \times \cdots \times (X - \alpha_r)^{m_r}$ divise P (admis). Conséquence : si P est non nul, le nombre de racines de P comptées avec multiplicités est inférieur ou égal à $\deg(P)$. (Question de cours, démonstration exigible de la conséquence, en se servant de la factorisation admise).
- ☐ Savoir donner des exemples où il n'y a pas égalité.
- ☐ Relations coefficients-racines pour les polynômes de degré 2 (Question de cours, avec démonstration exigible).

Note pour les colleurs : veuillez interroger surtout sur le chapitre des polynômes. Pour les suites : n'hésitez pas à demander des explications convaincantes sur pourquoi $f(\ell) = \ell$, pas de "théorème du point fixe", cela doit être bien compris.