Programme de colle 7

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous.

Note pour les colleurs : veuillez donner en premier exercice un système linéaire carré de taille 3 à résoudre - il faudra obligatoirement échelonner le système jusqu'au bout, avec la méthode du pivot de Gauss, avant les substitutions.

Limites

Dans cette partie, on considère I un intervalle, $x_0 \in I$, et f définie sur I sauf éventuellement en x_0, c'est-à-dire : le domaine de définition, noté D, de f, est soit I, soit $I \setminus \{x_0\}$.

Définitions

- ☐ Notion, pour une propriété portant sur la fonction f, d'être vraie "au voisinage de x_0", ou "au voisinage de $+\infty$" ou "au voisinage de $-\infty$" (Démontrer proprement, pour un exemple simple concret, qu'une fonction satisfait une propriété "au voisinage de..." pourra constituer une question de cours.).
- ☐ Soient $a, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, définitions de : f admet L pour limite en a. (Cela donne 9 définitions suivant a, L, à chaque fois l'élève devra pouvoir donner la définition avec des mots, avec un dessin, et avec des quantificateurs).
- ☐ Soit $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, définition de : f admet L pour limite à gauche en x_0 (condition : x_0 n'est pas l'extrémité gauche de D). Idem à droite. (Cela donne 6 définitions suivant L (et à gauche / à droite), à chaque fois l'élève devra pouvoir donner la définition avec des mots, avec un dessin, et avec des quantificateurs).
- ☐ Savoir que s'il y a une limite en a, elle est unique, on peut donc dans ce cas parler de LA limite en a de f.

Limites de fonctions usuelles

- ☐ Savoir déterminer les asymptotes horizontales, verticales, et de la forme $y = ax + b$.
- ☐ Les limites des fonctions usuelles (x^n, $\frac{1}{x}$, $\tan(x)$, e^x, $\ln(x)$, x^r ($r \in \mathbb{R}^*$) aux points "intéressants".

Opérations sur les limites

- ☐ Limites d'une somme, d'un produit, de l'inverse, d'un quotient.
- ☐ Savoir énoncer précisément et expliquer la propriété sur la limite d'une composée de fonctions (quand f admet b pour limite en a, et que g admet c pour limite en b, que dire de $g \circ f$?) (Question de cours avoir énoncer précisément ce résultat).
- ☐ Savoir énoncer précisément et expliquer la propriété sur la limite de $f(u_n)$ quand (u_n) admet pour limite a et f admet b pour limite en a (Question de cours avoir énoncer précisément ce résultat).
- ☐ Conséquences : 2 façons (avec les suites) de prouver qu'une fonction f n'a PAS de limite en a (deux suites qui convergent vers a mais leurs images n'ont pas la même limite, ou bien une suite qui converge vers a mais avec les images qui divergent).
- ☐ Croissances comparées : Quand x tend vers $+\infty$, $(\ln x)^\alpha \ll x^\beta \ll e^{\gamma x}$, et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$ (pour tous α, β, γ dans $\mathbb{R}_+^*$).
- ☐ Savoir reconnaître un taux d'accroissement (d'une fonction de référence) pour donner une limite.

Théorèmes fondamentaux sur les limites

- ☐ Si une fonction admet une limite finie en a, elle est bornée au voisinage de a. Si cette limite est strictement positive, la fonction est strictement positive au voisinage de a.
- ☐ Savoir "passer une inégalité large à la limite" (Question de cours : savoir énoncer précisément ce résultat).
- ☐ Théorème des gendarmes (Question de cours : savoir énoncer précisément ce résultat).
- ☐ Théorème de comparaison (Question de cours : savoir énoncer précisément ce résultat).
- ☐ Théorème de la limite monotone (Question de cours : savoir énoncer précisément ce résultat).

Continuité

Généralités

- ☐ Notion de continuité en x_0 d'une fonction f : x_0 est dans l'ensembre de définition de f, et f admet $f(x_0)$ comme limite en x_0 (Question de cours : donner la définition avec des mots puis avec des quantificateurs).
- ☐ Notion de continuité à gauche, à droite en un point (Question de cours : donner la définition avec des mots puis avec des quantificateurs).
- ☐ Notion de continuité sur un intervalle : f est dite continue sur un intervalle I si I est inclus dans l'ensemble de définition de f et que pour tout $x_0 \in I$, f est continue en x_0 (Question de cours : donner la définition avec des mots puis avec des quantificateurs).
- ☐ Équivalence, lorsque x_0 n'est pas à une extrémité de l'ensemble de définition, entre la continuité en x_0 et la continuité à gauche et à droite en x_0. Application pour démontrer la continuité ou la discontinuité en un point.
- ☐ Continuité des fonctions de référence sur leurs ensembles de définition (à l'exception de la fonction partie entière), la somme, le produit de fonctions continues sont continues. Si f est continue sur I et que g est continue sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est bien définie et continue sur I.
- ☐ Condition d'existence d'un prolongement continu d'une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$. Dans le cas où il y a existence, il y a unicité du prolongement continu.

Le théorème des valeurs intermédiaires et ses conséquences

- ☐ Théorème des valeurs intermédiaires (Question de cours : l'énoncer précisément, et l'illustrer par un exemple).
- ☐ L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle (Question de cours : le prouver, à partir du théorème des valeurs intermédiaires).
- ☐ Savoir déterminer $f(I)$ dans des cas concrets. On pourra utiliser sans démonstration que si f est continue sur l'intervalle $]a, b[$ (avec a, b finis ou infinis), que f admet pour limite l_a en a et l_b en b, alors $]l_a, l_b[$ (ou $]l_b, l_a[$) est inclus dans $f(I)$.
- ☐ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Avoir bien compris pourquoi cela implique que si f est continue sur un segment, alors f est bornée sur ce segment et atteint ses bornes. (Question de cours : l'énoncer précisément).
- ☐ Notations $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (attention aux conditions d'existence).
- ☐ Théorème de la bijection strictement monotone continue. (Question de cours : l'énoncer précisément).

Fonctions $x \to x^a$ et $\arctan$

- ☐ Fonctions $x \to x^a$ pour $a \in \mathbb{R}$: suivant la valeur de a, donner le domaine de définition, l'allure de la fonction, la réciproque si elle existe, la limite en 0, savoir résoudre (différents cas suivant les valeurs de a...) $y = x^a$ d'inconnue x. (Question de cours)
- ☐ Définition de arctan, avoir compris pourquoi $\arctan(x)$ est l'unique réel dans $]-\pi/2, \pi/2[$ dont la tangente vaut x, domaine de définition, savoir la tracer avec la fonction tangente (les deux ensembles avec la symétrie autour de $y = x$). (Question de cours)

Systèmes linéaires, matrices

- ☐ Savoir échelonner puis résoudre un système linéaire. Connaître la condition sur la forme échelonnée d'un système carré pour qu'il admette une unique solution (vocabulaire : système de Cramer).
- ☐ Notations I_n, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notation $[A]_{i,j}$ pour le coefficient de la ligne i, colonne j de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont la même taille et tous leurs coefficients égaux.
- ☐ Matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, expression en fonction du coefficient d'indice (i, j) de $E_{k,l}$.
- ☐ Définition d'une combinaison linéaire de matrices. Savoir expliquer pourquoi toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une combinaison linéaire des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- ☐ Savoir énoncer précisément à quel condition sur les tailles de deux matrices A, B peut-on parler du produit AB, et donner dans ce cas la définition du coefficient d'indice (i, j) de AB. (Question de cours : définition précise avec la formule pour $[AB]_{i,j}$ plus un exemple)
- ☐ Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a $A = B$ si, et seulement si, $(\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX = BX)$ (en EC1A)
- ☐ Propriétés de l'addition et la multiplication de matrices : on peut retenir que tout se passe comme attendu, sauf la commutativité (on n'a pas toujours $AB = BA$), et l'intégrité ($AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$).

☐ Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $AI_p = I_nA = A$.

☐ Transposée d'une matrice, savoir démontrer que ${}^t({}^tA) = A$ (Question de cours)

☐ Transposée d'une matrice, savoir démontrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ (Question de cours)